Un modello dei numeri iperreali

Riccardo Dossena

Introdurremo nella prossima sezione una nuova struttura matematica che sarà basilare nella costruzione di un modello dei numeri iperreali a partire dai numeri reali.

1 Gli ultrafiltri

Definizione 1.1 *Sia I un insieme non vuoto. Un filtro su I è una collezione non vuota $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di I avente le seguenti proprietà:*

i) l'insieme vuoto $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

ii) se $A, B \in \mathcal{F}$, allora $A \cap B \in \mathcal{F}$;

iii) se $A \in \mathcal{F}$ e $I \supseteq B \supseteq A$, allora $B \in \mathcal{F}$.

Un filtro $\mathcal{F}$ su I è un ultrafiltro su I se è massimale, cioè se ogni volta che $\mathcal{G}$ è un filtro su I e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, allora $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

Osserviamo subito che se $\mathcal{F}$ è un filtro su I, allora $I \in \mathcal{F}$ per la *iii)*. Inoltre, due sottoinsiemi disgiunti non possono appartenere entrambi a $\mathcal{F}$ per la *i)* e la *ii)*.

Il seguente risultato permette di dare una caratterizzazione agli ultrafiltri.

Teorema 1.2 *Un filtro $\mathcal{F}$ su I è un ultrafiltro se e solo se per ogni sottoinsieme A di I, o $A \in \mathcal{F}$ oppure il suo complementare $A' = I - A \in \mathcal{F}$ (ma non entrambi per la i) e la ii)).*

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathcal{F}$ sia un filtro tale che per ogni $A \subset I$ o $A \in \mathcal{F}$ o $A' \in \mathcal{F}$. Sia $\mathcal{G}$ un filtro tale che $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ e supponiamo che $B \in \mathcal{G}$ e $B \notin \mathcal{F}$. Allora $B' \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, così $\emptyset = B \cap B' \in \mathcal{G}$, contraddicendo la *i)* della definizione. Dunque non esiste un filtro $\mathcal{G}$ che contiene strettamente $\mathcal{F}$, cioè $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro.

Viceversa, supponiamo che $\mathcal{F}$ sia un ultrafiltro e sia $A \subseteq I$ tale che $A \notin \mathcal{F}$. Consideriamo l'insieme

$$\mathcal{G} = \{X \subseteq I : A \cap F \subseteq X \text{ per qualche } F \in \mathcal{F}\}.$$

Allora $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ (infatti se $F_0 \in \mathcal{F}$ allora $F_0 \subseteq I$ e $F_0 \supseteq A \cap F_0$, cioè $F_0 \in \mathcal{G}$) e $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$ (ad esempio $A \in \mathcal{G}$ perché $A \subseteq I$ e $A \supseteq A \cap F$ per ogni $F \in \mathcal{F}$), dunque $\mathcal{G}$ non è un filtro dato che $\mathcal{F}$ è massimale.

Osserviamo però che $\mathcal{G}$ è non vuoto e che se $B, C \in \mathcal{G}$ allora $B \cap C \in \mathcal{G}$. Infatti, se $B, C \in \mathcal{G}$, allora $B \supseteq A \cap F_0$ e $C \supseteq A \cap F_1$ dove $F_0, F_1 \in \mathcal{F}$ e da questo segue facilmente che $B \cap C \supseteq A \cap (F_0 \cap F_1)$ (si ricordi che $F_0 \cap F_1 \in \mathcal{F}$). Inoltre, se $B \in \mathcal{G}$ e $D \supseteq B$ si ha immediatamente che $D \in \mathcal{G}$.

Dunque $\mathcal{G}$ non è un filtro solo per il fatto che $\emptyset \in \mathcal{G}$. Allora esiste $F \in \mathcal{F}$ tale che $A \cap F = \emptyset$, da cui $F \subseteq A'$. Da questo segue che $A' \in \mathcal{F}$ per la *iii)* della definizione. $\square$

Intuitivamente si può pensare ad un ultrafiltro come ad una famiglia abbastanza grande di sottoinsiemi, ma non troppo grande dal momento che non può contenere, ad esempio, due insiemi disgiunti. Vale anzi la seguente

Proposizione 1.3 *Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I e siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sottoinsiemi di I tali che $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^n A_i = I$. Allora uno e uno solo degli A_i appartiene ad $\mathcal{U}$.*

Dimostrazione. Verifichiamo prima che almeno uno degli A_i appartiene ad $\mathcal{U}$. Per ogni i o $A_i \in \mathcal{U}$ o $I - A_i \in \mathcal{U}$. Supponiamo che nessuno degli A_i appartenga ad $\mathcal{U}$. Allora apparterrebbero ad $\mathcal{U}$ tutti gli insiemi $I - A_1, I - A_2, \ldots, I - A_n$. Dunque la loro intersezione (finita) apparterrebbe ad $\mathcal{U}$:

$$\bigcap_{i=1}^{n} (I - A_i) = I - \bigcup_{i=1}^{n} A_i = I - I = \emptyset \in \mathcal{U}$$

il che è assurdo.

Vediamo ora l'unicità. Se esistessero due indici i, j con $i \neq j$ per i quali $A_i, A_j \in \mathcal{U}$ si avrebbe che $A_i \cap A_j = \emptyset \in \mathcal{U}$, assurdo. $\square$

Si può verificare facilmente che se I è un insieme non vuoto, dato $a \in I$ la collezione $\mathcal{U}_a = \{A \subseteq I : a \in A\}$ è un ultrafiltro su I. Diamo allora la seguente

Definizione 1.4 *Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su I è detto principale (o fisso) se esiste un elemento $a \in I$ tale che $\mathcal{U} = \{A \subseteq I : a \in A\}$.*

Definizione 1.5 *Sia I un insieme infinito. La collezione $\mathcal{F}_I = \{A \subseteq I : I - A \text{ è finito}\}$ è un filtro chiamato filtro cofinito o filtro di Fréchet.*

Definizione 1.6 *Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su I infinito si dice libero se contiene $\mathcal{F}_I$.*

Proposizione 1.7 *Sia I un insieme infinito. Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su I è libero se e solo se non è principale.*

Dimostrazione. Vediamo dapprima che un ultrafiltro $\mathcal{U}$ principale non può essere libero. Se esistesse $a \in I$ tale che $\mathcal{U} = \{A \subseteq I : a \in A\}$ e $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}_I$, allora $\mathcal{U}$ conterrebbe sia l'insieme $\{a\}$ sia l'insieme cofinito $F = I - \{a\} = \{a\}'$, ma questo è assurdo.

Vediamo ora che un ultrafiltro $\mathcal{U}$ non libero è principale. Sia dunque $\mathcal{U} \not\supseteq \mathcal{F}_I$, cioè esiste un insieme $A \subseteq I$ con $I - A$ finito tale che $A \notin \mathcal{U}$. Allora $I - A \in \mathcal{U}$ (essendo $\mathcal{U}$ ultrafiltro). Siccome $I - A$ è finito e non vuoto (perché $\emptyset \notin \mathcal{U}$), si può scrivere:

$$I - A = \{a_1, \ldots, a_n\} = \{a_1\} \cup \ldots \cup \{a_n\}$$

da cui segue subito

$$I = \{a_1\} \cup \ldots \cup \{a_n\} \cup A$$

cioè I è unione degli insiemi disgiunti $\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}, A$. Dalla Proposizione 1.3, dato che $A \notin \mathcal{U}$, segue che $\{a_i\} \in \mathcal{U}$ per uno e un solo i. Allora tutti i sottoinsiemi che includono $\{a_i\}$ appartengono ad $\mathcal{U}$, il che significa $\mathcal{U} \supseteq \{A \subseteq I : a_i \in A\}$. Per la massimalità degli ultrafiltri $\mathcal{U} = \{A \subseteq I : a_i \in A\}$. $\square$

Osserviamo che un ultrafiltro libero $\mathcal{U}$ non può comunque contenere nessun insieme finito F, altrimenti $F' = I - F$ sarebbe cofinito e dunque apparterrebbe a $\mathcal{U}$, da cui $F \cap F' = \emptyset \in \mathcal{U}$ in contraddizione con la *i)* della definizione.

A questo punto sorge un problema: chi ci assicura che gli ultrafiltri liberi esistano? Eppure questo tipo di struttura sarà fondamentale per i nostri scopi. Fortunatamente la loro esistenza segue dal *Lemma di Zorn*, che è una variante dell'*Assioma della scelta*. L'enunciato del Lemma di Zorn coinvolge alcune nozioni che ora introduciamo.

Definizione 1.8 *Un insieme parzialmente ordinato è una coppia* $(X, \leq)$ *dove* X *è un insieme non vuoto e* $\leq$ *è una relazione binaria su* X *che soddisfa le seguenti proprietà:*

i) riflessività: $x \leq x$ *per ogni* $x \in X$*;*

ii) antisimmetria: se $x \leq y$ *e* $y \leq x$*, allora* $x = y$*;*

iii) transitività: se $x \leq y$ *e* $y \leq z$*, allora* $x \leq z$*.*

Un sottoinsieme C *di* X *è una catena se per ogni* $x, y \in C$ *o* $x \leq y$ *o* $y \leq x$*. Un elemento* $x \in X$ *è un maggiorante per l'insieme* $B \subseteq X$ *se* $b \leq x$ *per ogni* $b \in B$*. Un elemento* $m \in X$ *è massimale se, per tutti gli* $x \in X$*,* $m \leq x$ *implica* $x = m$*.*

Lemma di Zorn. *Sia* $(X, \leq)$ *un insieme parzialmente ordinato. Se ogni catena in* X *ha un maggiorante, allora* X *ha almeno un elemento massimale.*

Possiamo ora dimostrare il seguente importante risultato:

Teorema 1.9 *Se* $\mathcal{F}$ *è un filtro su* I*, allora esiste un ultrafiltro* $\mathcal{U}$ *su* I *che contiene* $\mathcal{F}$*.*

Dimostrazione. Sia $\hat{\mathcal{F}}$ l'insieme di tutti i filtri su I che contengono $\mathcal{F}$. $\hat{\mathcal{F}}$ è non vuoto dal momento che $\mathcal{F} \in \hat{\mathcal{F}}$. Ordiniamo parzialmente $\hat{\mathcal{F}}$ tramite l'inclusione, ovvero, se $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \hat{\mathcal{F}}$, allora diremo che $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ se $A \in \mathcal{A}$ implica $A \in \mathcal{B}$. È facile verificare che $\leq$ è un ordine parziale su $\hat{\mathcal{F}}$. Sia ora $\tilde{\mathcal{C}}$ una catena in $\hat{\mathcal{F}}$. Per dimostrare che $\tilde{\mathcal{C}}$ ha un maggiorante consideriamo l'insieme $\tilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{\mathcal{C} \in \tilde{\mathcal{C}}} \mathcal{C}$. Allora $\mathcal{C} \leq \tilde{\mathcal{F}}$ per ogni $\mathcal{C} \in \tilde{\mathcal{C}}$. Inoltre $\tilde{\mathcal{F}}$ è un filtro su I che contiene $\mathcal{F}$. Infatti, se $A, B \in \tilde{\mathcal{F}}$, allora $A \in \mathcal{C}_1$ e $B \in \mathcal{C}_2$ per qualche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ in $\tilde{\mathcal{C}}$. Dato che $\tilde{\mathcal{C}}$ è una catena, non è limitativo supporre $\mathcal{C}_1 \leq \mathcal{C}_2$, dunque $A, B \in \mathcal{C}_2$ e $A \cap B \in \mathcal{C}_2 \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$ (ricordiamo che $\mathcal{C}_2$ è un filtro). In modo analogo si verificano le altre proprietà dei filtri.

Dunque abbiamo trovato un maggiorante per la generica catena $\tilde{\mathcal{C}}$. Deduciamo dal Lemma di Zorn che $\hat{\mathcal{F}}$ contiene un elemento massimale che è allora un ultrafiltro su I contenente $\mathcal{F}$. $\square$

Corollario 1.10 *Gli ultrafiltri liberi esistono su ogni insieme infinito* I*.*

Dimostrazione. Basta considerare il filtro cofinito $\mathcal{F}_I$. Dal teorema precedente esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}$ che contiene $\mathcal{F}_I$: tale ultrafiltro è libero per definizione. $\square$

2 Costruzione dei numeri iperreali

Indichiamo con $\Re = (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ il campo ordinato completo dei numeri reali, dove $\mathbb{R}$ denota l'insieme dei numeri reali e $+$, $\cdot$ e $\leq$ denotano rispettivamente le usuali operazioni algebriche di addizione, moltiplicazione e l'ordinaria relazione d'ordine. Il nostro scopo è quello di costruire un altro campo ordinato $\Re^* = (\mathbb{R}^*, +^*, \cdot^*, \leq^*)$ che contenga una copia isomorfa di $\Re$, ma che sia strettamente più ampio di $\Re$. La struttura $\Re^*$ verrà chiamata sistema dei numeri iperreali.

Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e sia $\hat{\mathbb{R}}$ l'insieme di tutte le successioni di numeri reali (cioè di tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$). Allora ogni elemento di $\hat{\mathbb{R}}$ è della forma $r = \langle r_1, r_2, r_3, \ldots \rangle$. Per comodità denotiamo $\langle r_1, r_2, r_3, \ldots \rangle$ con $\langle r_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ o più semplicemente con $\langle r_i \rangle$. Se $r = \langle r_i \rangle$ e $s = \langle s_i \rangle$ sono elementi di $\hat{\mathbb{R}}$, le operazioni di addizione $\oplus$ e moltiplicazione $\odot$ possono essere definite su $\hat{\mathbb{R}}$ nel seguente modo:

$$r \oplus s = \langle r_i + s_i \rangle$$

$$r \odot s = \langle r_i \cdot s_i \rangle \,.$$

È facile verificare che $(\hat{\mathbb{R}}, \oplus, \odot)$ è un anello commutativo con unità $\langle 1, 1, 1, \ldots \rangle$ e zero $\langle 0, 0, 0, \ldots \rangle$ (dove 1 e 0 sono rispettivamente l'unità e lo zero di $\mathbb{R}$). Tuttavia, questo anello *non* è un campo perché ad esempio

$$\langle 1, 0, 1, 0, 1, \ldots \rangle \odot \langle 0, 1, 0, 1, 0, \ldots \rangle = \langle 0, 0, 0, \ldots \rangle$$

cioè il prodotto di due elementi diversi da zero può essere zero. Rimedieremo a questo inconveniente introducendo una relazione di equivalenza su $\hat{\mathbb{R}}$ e definendo sull'insieme delle classi di equivalenza $\mathbb{R}^*$ le operazioni $+^*$, $\cdot^*$ e la relazione $\leq^*$ che renderanno $(\mathbb{R}^*, +^*, \cdot^*, \leq^*)$ un campo ordinato.

Convenzione notazionale. D'ora in avanti scriveremo le operazioni e relazioni di $\mathbb{R}^*$ ($+^*$, $\cdot^*$ e $\leq^*$) senza asterischi, allo scopo di alleggerirne le notazioni: il contesto chiarirà ogni possibile confusione.

Dal Corollario 1.10 segue l'esistenza di un ultrafiltro libero sull'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Denotiamo con $\mathcal{U}$ tale ultrafiltro. Definiamo una relazione $\equiv$ su $\hat{\mathbb{R}}$ come segue ($\equiv$ dipenderà dall'ultrafiltro $\mathcal{U}$, ma questa dipendenza non giocherà alcun ruolo).

Definizione 2.1 *Se $r = \langle r_i \rangle$ e $s = \langle s_i \rangle$ sono elementi di $\hat{\mathbb{R}}$, allora $r \equiv s$ se e solo se $\{i \in \mathbb{N} : r_i = s_i\} \in \mathcal{U}$. In questo caso diremo che r ed s sono uguali quasi ovunque e scriveremo $\langle r_i \rangle = \langle s_i \rangle$ q.o.*

Proposizione 2.2 *La relazione $\equiv$ su $\hat{\mathbb{R}}$ è di equivalenza.*

Dimostrazione. La relazione $\equiv$ è riflessiva ($r \equiv r$) poiché $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$ ed è simmetrica ($r \equiv s$ implica $s \equiv r$) per la simmetria della relazione $=$ su $\mathbb{R}$. Verifichiamo che è anche transitiva ($r \equiv s$ e $s \equiv t$ implica $r \equiv t$). Se entrambi gli insiemi $\{i \in \mathbb{N} : r_i = s_i\}$ e $\{i \in \mathbb{N} : s_i = t_i\}$ appartengono ad $\mathcal{U}$, allora appartiene ad $\mathcal{U}$ anche la loro intersezione. D'altronde si ha

$$\{i \in \mathbb{N} : r_i = t_i\} \supseteq \{i \in \mathbb{N} : r_i = s_i\} \cap \{i \in \mathbb{N} : s_i = t_i\}$$

e per definizione di ultrafiltro anche il primo membro dell'inclusione appartiene ad $\mathcal{U}$. $\square$

Si noti che due successioni possono avere lo stesso limite per $n \to \infty$ e tuttavia non essere equivalenti. Ad esempio $\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \right\rangle \not\equiv \langle 0, 0, 0, \ldots \rangle$ dal momento che $\emptyset \notin \mathcal{U}$; successioni come $\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \right\rangle$ saranno usate per definire i "numeri infinitesimi" diversi da zero. Vedremo anche come tale relazione d'equivalenza risolva la questione del prodotto di due elementi diversi da zero che può essere zero. Ad esempio, non è difficile osservare che una delle due successioni $\langle 1, 0, 1, 0, 1, \ldots \rangle$ e $\langle 0, 1, 0, 1, 0, \ldots \rangle$ è equivalente a $\langle 0, 0, 0, \ldots \rangle$: quale delle due dipende dal particolare ultrafiltro $\mathcal{U}$ usato per definire $\equiv$.

L'insieme $\hat{\mathbb{R}}$ è partizionato da $\equiv$ in sottoinsiemi disgiunti chiamati classi di equivalenza. Ciascuna classe di equivalenza contiene tutte le successioni equivalenti a ogni successione della classe stessa. Così r ed s sono nella stessa classe di equivalenza se e solo se $r \equiv s$. Naturalmente, due successioni che differiscono solo per un numero finito di elementi sono equivalenti e dunque appartengono alla stessa classe.

Definizione 2.3 *$\mathbb{R}^*$ è l'insieme di tutte le classi di equivalenza di $\hat{\mathbb{R}}$ indotte da $\equiv$. La classe contenente una particolare successione $s = \langle s_i \rangle$ si denota con $[s]$ o $\mathbf{s}$. Così $r \equiv s$ in $\hat{\mathbb{R}}$ se e solo se $\mathbf{r} = [r] = [s] = \mathbf{s}$. Gli elementi di $\mathbb{R}^*$ sono chiamati numeri iperreali.*

Dalla definizione segue subito che se $\mathbf{r} = [r]$ e $\mathbf{s} = [s]$, allora $\mathbf{r} = \mathbf{s}$ se e solo se $\langle r_i \rangle = \langle s_i \rangle$ q.o., cioè se e solo se $\{i \in \mathbb{N} : r_i = s_i\} \in \mathcal{U}$.

Possiamo ora definire le seguenti operazioni e relazioni su $\mathbb{R}^*$.

Definizione 2.4 *Siano $\mathbf{r} = [\langle r_i \rangle]$ e $\mathbf{s} = [\langle s_i \rangle]$. Allora*

i) $\mathbf{r} + \mathbf{s} = [\langle r_i + s_i \rangle]$, *cioè* $[r] + [s] = [r \oplus s]$;

ii) $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = [\langle r_i \cdot s_i \rangle]$, *cioè* $[r] \cdot [s] = [r \odot s]$;

iii) $\mathbf{r} < \mathbf{s}$ $(\mathbf{s} > \mathbf{r})$ *se e solo se* $\{i \in \mathbb{N} : r_i < s_i\} \in \mathcal{U}$;

iv) $\mathbf{r} \leq \mathbf{s}$ $(\mathbf{s} \geq \mathbf{r})$ *se e solo se* $\mathbf{r} < \mathbf{s}$ *o* $\mathbf{r} = \mathbf{s}$.

La struttura $(\mathbb{R}^*, +, \cdot, \leq)$ viene denotata con $\Re^*$.

A questo punto dobbiamo verificare che la definizione precedente è indipendente dai particolari rappresentanti scelti dalle classi di equivalenza. Dobbiamo cioè verificare che se $r \equiv \bar{r}$ e $s \equiv \bar{s}$, allora $[r \oplus s] = [\bar{r} \oplus \bar{s}]$, $[r \odot s] = [\bar{r} \odot \bar{s}]$ e $[\bar{r}] < [\bar{s}]$ se e solo se $[r] < [s]$. Noi verificheremo soltanto la prima uguaglianza, essendo le altre analoghe.

Siano $r = \langle r_i \rangle$, $\bar{r} = \langle \bar{r}_i \rangle$, $s = \langle s_i \rangle$ e $\bar{s} = \langle \bar{s}_i \rangle$ tali che $r \equiv \bar{r}$ e $s \equiv \bar{s}$. Allora $\{i \in \mathbb{N} : r_i = \bar{r}_i\}$ e $\{i \in \mathbb{N} : s_i = \bar{s}_i\}$ appartengono entrambi ad $\mathcal{U}$. Ovviamente

$$\{i \in \mathbb{N} : r_i + s_i = \bar{r}_i + \bar{s}_i\} \supseteq \{i \in \mathbb{N} : r_i = \bar{r}_i\} \cap \{i \in \mathbb{N} : s_i = \bar{s}_i\}.$$

Il secondo membro dell'inclusione appartiene a $\mathcal{U}$, in quanto intersezione di due elementi di $\mathcal{U}$, dunque anche il primo membro appartiene ad $\mathcal{U}$.

Possiamo finalmente enunciare il seguente

Teorema 2.5 *La struttura $\Re^*$ è un campo ordinato.*

Dimostrazione. Il fatto che $\Re^*$ sia un anello commutativo con zero $\mathbf{0} = [\langle 0, 0, 0, \dots\rangle]$ ed unità $\mathbf{1} = [\langle 1, 1, 1, \dots\rangle]$ è di facile verifica. Per esempio, la proprietà distributiva $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{s} + \mathbf{t}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{t}$ si dimostra come segue. Siano $\mathbf{r} = [r]$, $\mathbf{s} = [s]$ e $\mathbf{t} = [t]$, allora:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} \cdot (\mathbf{s} + \mathbf{t}) &= [r] \cdot ([s] + [t]) = [r] \cdot [s \oplus t] = [r \odot (s \oplus t)] = \\
&= [(r \odot s) \oplus (r \odot t)] = [r \odot s] + [r \odot t] = \\
&= [r] \cdot [s] + [r] \cdot [t] = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{t}.
\end{aligned}$$

Gli altri assiomi degli anelli commutativi vengono dimostrati analogamente.

Per dimostrare che $\Re^*$ è un campo dobbiamo in più dimostrare che ogni elemento diverso da zero in $\mathbb{R}^*$ ha un inverso (cioè, se $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ allora esiste un elemento $\mathbf{r}^{-1}$ in $\mathbb{R}^*$ tale che $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^{-1} = \mathbf{1}$). Supponiamo che $\mathbf{r} = [\langle r_i \rangle] \neq [\langle 0, 0, 0, \dots\rangle]$. Allora $\{i \in \mathbb{N} : r_i = 0\} \notin \mathcal{U}$, dunque il suo complementare $\{i \in \mathbb{N} : r_i \neq 0\} \in \mathcal{U}$. Definiamo $\mathbf{r}^{-1} = [\langle \bar{r}_i \rangle]$ dove $\bar{r}_i = r_i^{-1}$ se $r_i \neq 0$ e $\bar{r}_i = 0$ se $r_i = 0$. A questo punto è facile verificare che $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^{-1} = \mathbf{1}$ (infatti $\{i \in \mathbb{N} : r_i \cdot \bar{r}_i = 1\} = \{i \in \mathbb{N} : r_i \neq 0\}$).

Infine dobbiamo provare che $\Re^*$ è un campo ordinato tramite l'ordinamento fornito da $\leq$, dobbiamo cioè dimostrare che

1. per ogni $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^*$, se $\mathbf{r} \leq \mathbf{s}$ allora $\mathbf{r} + \mathbf{t} \leq \mathbf{s} + \mathbf{t}$;

2. per ogni $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^*$, se $\mathbf{r} \leq \mathbf{s}$ e $\mathbf{t} \geq \mathbf{0}$ allora $\mathbf{r} \cdot \mathbf{t} \leq \mathbf{s} \cdot \mathbf{t}$;

3. (dicotomia) per ogni $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^*$, $\mathbf{r} \leq \mathbf{s}$ o $\mathbf{s} \leq \mathbf{r}$.

Siano $\mathbf{r} = [\langle r_i \rangle]$ e $\mathbf{s} = [\langle s_i \rangle]$.

Dimostriamo la 1. Se $\mathbf{r} \leq \mathbf{s}$ si ha per definizione che $\{i \in \mathbb{N} : r_i < s_i\} \in \mathcal{U}$ oppure $\{i \in \mathbb{N} : r_i = s_i\} \in \mathcal{U}$. Nel secondo caso la tesi è ovvia. Nel primo si avrebbe comunque $\{i \in \mathbb{N} : r_i < s_i\} = \{i \in \mathbb{N} : r_i + t_i < s_i + t_i\}$ per le proprietà dei numeri reali.

Dimostriamo la 2. Supponiamo che sia $\mathbf{r} < \mathbf{s}$ e $\mathbf{t} > \mathbf{0}$, dunque $\{i \in \mathbb{N} : r_i < s_i\} \in \mathcal{U}$ e $\{i \in \mathbb{N} : t_i > 0\} \in \mathcal{U}$. Si ha che

$$\begin{aligned}
\{i \in \mathbb{N} : r_i \cdot t_i < s_i \cdot t_i\} &\supseteq \{i \in \mathbb{N} : r_i < s_i \text{ e } t_i > 0\} = \\
&= \{i \in \mathbb{N} : r_i < s_i\} \cap \{i \in \mathbb{N} : t_i > 0\} \in \mathcal{U}.
\end{aligned}$$

I casi che coinvolgono le uguaglianze sono banali.

Occupiamoci ora della 3. Definiamo $A = \{i \in \mathbb{N} : r_i > s_i\}$, $B = \{i \in \mathbb{N} : r_i = s_i\}$ e $C = \{i \in \mathbb{N} : r_i < s_i\}$. Se dimostriamo che uno e uno solo degli A, B, C appartiene ad $\mathcal{U}$, la dicotomia è ovviamente verificata. Ma dato che tali insiemi sono a due a due disgiunti per le proprietà di $\mathbb{R}$ e siccome $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$, questo segue banalmente dalla Proposizione 1.3. $\square$

Diremo che un elemento $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^*$ è positivo se $\mathbf{r} > \mathbf{0}$, negativo se $\mathbf{r} < \mathbf{0}$. Diamo quindi la seguente

Definizione 2.6 *Se $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^*$, allora*

$$|\mathbf{r}| = \begin{cases} \mathbf{r} & \text{se } \mathbf{r} > \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{se } \mathbf{r} = \mathbf{0} \\ -\mathbf{r} & \text{se } \mathbf{r} < \mathbf{0} \end{cases}$$

dove $-\mathbf{r}$ è l'inverso additivo di $\mathbf{r}$ (ovvero, se $\mathbf{r} = [\langle r_i \rangle]$, allora $-\mathbf{r} = [\langle -r_i \rangle]$).

Si può dimostrare che questo valore assoluto generalizzato ha tutte le proprietà del valore assoluto in $\mathbb{R}$. È anzi interessante il prossimo risultato.

Proposizione 2.7 *Se* $\mathbf{r} = [\langle r_i \rangle]$, *allora* $|\mathbf{r}| = [\langle |r_i| \rangle]$.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{r} > \mathbf{0}$. Allora $|\mathbf{r}| = \mathbf{r}$ per definizione. Dobbiamo mostrare che $[\langle |r_i| \rangle] = [\langle r_i \rangle]$, cioè che $\{i \in \mathbb{N} : |r_i| = r_i\} \in \mathcal{U}$. Questo segue subito dal fatto che $\{i \in \mathbb{N} : |r_i| = r_i\} \supseteq \{i \in \mathbb{N} : r_i > 0\} \in \mathcal{U}$. I casi $\mathbf{r} < \mathbf{0}$ e $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ vengono trattati similmente. $\square$

Il nostro prossimo obiettivo è quello di mostrare che $\mathbb{R}$ può essere "immerso" in $\mathbb{R}^*$, o in termini più precisi che $\mathbb{R}^*$ contiene un sottocampo isomorfo ad $\mathbb{R}$. Definiamo a tale scopo una funzione $\star : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ come segue:

Definizione 2.8 *Sia* $r \in \mathbb{R}$. *Definiamo* $\star(r) = {}^\star r$, *dove* ${}^\star r = [\langle r, r, r, \ldots \rangle] \in \mathbb{R}^*$.

Teorema 2.9 *La funzione* $\star$ *è un isomorfismo di campi ordinati tra* $\mathbb{R}$ *e* $\star(\mathbb{R})$, *dove con* $\star(\mathbb{R})$ *intendiamo l'insieme immagine* $\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^* : \mathbf{r} = \star(r) \text{ per qualche } r \in \mathbb{R}\}$.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema è banale e noiosa, perciò ne diamo solo un cenno senza entrare nei dettagli.

La funzione $\star$ è iniettiva. Infatti, se ${}^\star r = {}^\star s$ allora $[\langle r, r, r, \ldots \rangle] = [\langle s, s, s, \ldots \rangle]$ da cui $r = s$. È banale mostrare che $\star$ conserva la struttura di campo (cioè le operazioni) e le proprietà dell'ordine. Ad esempio l'equazione $[\langle r, r, r, \ldots \rangle] + [\langle s, s, s, \ldots \rangle] = [\langle r+s, r+s, r+s, \ldots \rangle]$ stabilisce che ${}^\star(r+s) = {}^\star r + {}^\star s$. $\square$

Siamo quindi senz'altro autorizzati a dire che $\mathbb{R}^*$ contiene $\mathbb{R}$, cioè ad identificare esattamente $\star(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}$. L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ viene anche detto insieme dei numeri *standard* mentre $\mathbb{R}^* - \mathbb{R}$ viene detto insieme dei numeri *nonstandard*.

Mostriamo ora che $\mathbb{R}^*$ contiene numeri in più di quelli standard.

Consideriamo il numero $\boldsymbol{\omega} = [\langle 1, 2, 3, \ldots \rangle]$. Esso non può essere equivalente ad alcun numero ${}^\star r = [\langle r, r, r, \ldots \rangle]$, dato che l'insieme $\{i \in \mathbb{N} : r = i\}$ contiene al più un numero naturale. Analogamente si vede che il suo inverso $\boldsymbol{\omega}^{-1} = \left[\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \right\rangle\right]$ non appartiene a $\star(\mathbb{R})$. I numeri $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\omega}^{-1}$ saranno chiamati rispettivamente numero *infinito* e numero *infinitesimo*.

A questo punto possiamo adottare le seguenti

Convenzioni notazionali.

1. Identificando $\star(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}$, conveniamo di utilizzare sempre la notazione $\mathbb{R}$. Analogamente i numeri ${}^\star r$ verranno semplicemente indicati con r (ad esempio useremo 5 al posto di ${}^\star 5$ per indicare $[\langle 5, 5, 5, \ldots \rangle]$).

2. Sia i numeri di $\mathbb{R}^*$ sia quelli di $\mathbb{R}$ verranno indicati con lettere minuscole: dal contesto risulterà chiaro se un numero r appartiene ad $\mathbb{R}^*$ o ad $\mathbb{R}$.

3 Infiniti e infinitesimi

Definizione 3.1 *Sia $s \in \mathbb{R}^*$. Allora:*

i) s è infinito se $n < |s|$ per tutti i numeri naturali standard n;

ii) s è finito se $|s| < n$ per qualche numero naturale standard n;

iii) s è infinitesimo se $|s| < 1/n$ per tutti i numeri naturali standard n.

Esempi.

1. Il numero $\omega = \left[\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\rangle\right]$ è un numero infinitesimo. Infatti, fissato $n \in \mathbb{N}$, $\{i \in \mathbb{N} : \omega_i < 1/n\}$ è il complementare di un insieme finito e dunque appartiene ad $\mathcal{U}$.

2. Il suo inverso $\omega^{-1} = [\langle 1, 2, 3, \ldots\rangle]$ è un numero infinito. Infatti, fissato $n \in \mathbb{N}$, $\left\{i \in \mathbb{N} : n < \omega_i^{-1}\right\}$ è il complementare di un insieme finito e dunque appartiene ad $\mathcal{U}$. Esistono inoltre infiniti numeri maggiori di ω: si considerino ad esempio i numeri $[\langle 2, 3, 4, \ldots\rangle]$, $[\langle 3, 4, 5, \ldots\rangle]$, ecc.

Dalla definizione e dalla Proprietà di Archimede per i numeri reali, usando l'identificazione di $\star(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}$, risulta banale dimostrare che un numero è infinitesimo se e solo se è minore in valore assoluto di qualsiasi numero reale positivo, mentre è infinito se e solo se è maggiore in valore assoluto di qualsiasi numero reale positivo.

Osserviamo anche che il numero reale 0 è infinitesimo. Esso è tuttavia l'unico numero reale infinitesimo, come segue subito dalla proprietà archimedea.

Definizione 3.2 *Due numeri iperreali b e c sono infinitamente vicini ($b \approx c$) se la loro differenza $c - b$ è un infinitesimo.*

Lemma 3.3 *La somma di due numeri infinitesimi è un infinitesimo.*

Dimostrazione. Siano ε e ε' infinitesimi. Allora $|\varepsilon| < b$ per ogni b reale positivo e $|\varepsilon'| < b'$ per ogni b' reale positivo. Dato che il valore assoluto in $\mathbb{R}^*$ ha tutte le proprietà del valore assoluto in $\mathbb{R}$:

$$|\varepsilon + \varepsilon'| \leq |\varepsilon| + |\varepsilon'| < b + b' \text{ per ogni } b, b' \text{ reali positivi.}$$

Sia ora r reale positivo. Basta scegliere $b = r - b'$ per verificare che $|\varepsilon + \varepsilon'| < r$. $\square$

Teorema 3.4 *La relazione $\approx$ è di equivalenza su $\mathbb{R}^*$.*

Dimostrazione. Riflessività ($a \approx a$). Infatti $a - a = 0$ che per la nostra definizione è un infinitesimo.

Simmetria ($a \approx b$ implica $b \approx a$). Infatti se $b - a = \varepsilon$ è infinitesimo, allora $a - b = -\varepsilon$ è pure infinitesimo.

Transitività ($a \approx b$ e $b \approx c$ implica $a \approx c$). Infatti se $b - a = \varepsilon$ è infinitesimo e $c - b = \varepsilon'$ è infinitesimo, allora $c = b + \varepsilon'$ e $a = b - \varepsilon$. Dunque $c - a = b + \varepsilon' - b + \varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon$ che è infinitesimo per il lemma precedente. $\square$

Il prossimo teorema è di fondamentale importanza per lo sviluppo dell'Analisi Non-Standard:

Teorema 3.5 (Teorema della parte standard) *Ogni numero iperreale finito è infinitamente vicino ad uno e un solo numero reale.*

Dimostrazione. Sia ρ un numero iperreale finito.

Esistenza. Siano $A = \{x \in \mathbb{R} : \rho \leq x\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x < \rho\}$. Se ρ è finito esiste un numero reale s tale che $-s < \rho < s$. Segue che B è non vuoto e ha un maggiorante. Sia r l'estremo superiore (reale) di B (l'esistenza di r è assicurata dalla completezza di $\mathbb{R}$). Per ogni $\varepsilon > 0$ in $\mathbb{R}$, $r + \varepsilon \in A$ e $r - \varepsilon \in B$, così $r - \varepsilon < \rho \leq r + \varepsilon$ e dunque $|r - \rho| \leq \varepsilon$. Segue che $r - \rho$ è infinitesimo, da cui $r \approx \rho$.

Unicità. Siano $b, c \in \mathbb{R}$. Dobbiamo dimostrare che se $\rho \approx b$ e $\rho \approx c$, allora $b = c$. Per la transitività $b \approx c$, ma b e c sono numeri reali e l'unico infinitesimo di cui possono differire è 0 ($c - b$ è un numero reale). $\square$

Esempi. Sia ε un numero iperreale infinitesimo.

1. Il numero $3 + \varepsilon$ è infinitamente vicino a 3 perché $(3 + \varepsilon) - 3 = \varepsilon$ è infinitesimo.

2. Il numero $7+\varepsilon$ è infinitamente vicino a 7, ma anche a $7+\varepsilon+\varepsilon$. Sia $7+\varepsilon$ sia $7+\varepsilon+\varepsilon$ sono infinitamente vicini a 7 e a nessun altro numero reale ($\varepsilon + \varepsilon$ è infinitesimo).

3. Banalmente $2 \approx 2$ dato che $2 - 2 = 0$ è infinitesimo.

Concludiamo dando un nome a questo unico reale infinitamente vicino ad un iperreale finito.

Definizione 3.6 *Sia b un numero iperreale finito. L'unico numero reale cui b è infinitamente vicino si chiama parte standard di b e viene denotato con* $\mathrm{st}(b)$.

Riferimenti bibliografici

[1] Davis, M., Hersh, R., *L'Analisi Non-Standard*, *Le Scienze quaderni*, 60, 1991, pp. 52-59 (numero speciale a cura di C. Mangione).

[2] Gilardi, G., *Analisi uno*, McGraw-Hill, Milano, 1991.

[3] Hurd, A. E., Loeb, P. A., *An introduction to Nonstandard Real Analysis*, Academic Press, Orlando, 1985.

[4] Keisler, H. J., *Elementary Calculus*, Prindle, Weber and Schmidt, Boston, 1976 (tr. it. di R. Ferro, G. Sambin, L. Colussi, A. Facchini, A. Le Donne, *Elementi di Analisi Matematica*, Piccin Editore, Padova, 1982).

[5] Keisler, H. J., *Foundations of Infinitesimal Calculus*, Prindle, Weber and Schmidt, Boston, 1976.

[6] Magnani, L., Gennari, R., *Manuale di Logica*, Guerini Scientifica, Milano, 1997.

[7] Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, D. Van Nostrand Company, Princeton, NJ, 1964 (tr. it. di T. Pallucchini, *Introduzione alla logica matematica*, Bollati Boringhieri, Torino, 1972).

[8] Robinson, A., *Non-Standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1966.