

7

Il mondo iperreale attraverso i microscopi ottici

Riccardo Dossena¹ - Liceo Scientifico “G. Novello” - Codogno (LO)

L'analisi non standard consente un'interpretazione grafica suggestiva basata sugli strumenti ottici, che possono essere utilizzati efficacemente nella pratica didattica. In particolare, i microscopi permettono di visualizzare come appare il grafico di una funzione in un intorno infinitesimale di un suo punto e, se si vuole, di sviluppare un conseguente ragionamento. Ma quali sono gli aspetti e i dettagli che effettivamente possono rivelare? In questo intervento, rivolto agli insegnanti, proporremo una formalizzazione matematica rigorosa dei microscopi infinitesimali che assicuri il loro corretto, seppur informale, utilizzo nelle situazioni didattiche.

7.1 Introduzione

I microscopi infinitesimali e i telescopi infiniti sono espedienti grafici che ricoprono un ruolo di primo piano nella didattica basata sull'analisi non standard, come testimoniano il manuale *Elementary Calculus* di H. J. Keisler [8], i volumi della collana *Il professor Apotema insegna...* di G. Goldoni, in particolare [4, 5, 6], e il manuale di B. Stecca e D. Zambelli [Stecca, 2016] (ispirato ai libri del prof. Apotema). A differenza del testo di Keisler, in cui l'uso degli strumenti ottici è volto soprattutto alla comprensione dei concetti, nei libri di Goldoni sono presenti anche diverse applicazioni finalizzate alla scoperta di metodi risolutivi. Se in [8] viene svolta una trattazione piuttosto informale, in [9] vengono presentate definizioni più rigorose, suggerite originariamente da K. D. Stroyan (si veda il manuale [13]). In seguito, D. Tall [14] ha proposto una leggera modifica delle definizioni che si è rivelata utile per completare in modo proficuo il processo di formalizzazione. Coi lavori di L. Magnani e

¹Email: riccardo.dossena@unipv.it

R. Dossena [10, 3], proseguiti nella stessa direzione, sono stati approfonditi alcuni aspetti epistemologici, con particolare riferimento alla classificazione degli strumenti ottici come *mediatori epistemici* nell'ambito della *manipulative abduction*, e sviluppate tecnicamente ulteriori applicazioni (si vedano ad esempio gli articoli di J. Baire e V. Henry [1, 2]).

Lo scopo principale di questo intervento è di offrire all'insegnante che propende per un approccio didattico non standard la possibilità di sfruttare le potenzialità degli strumenti ottici con maggiore consapevolezza, che crediamo si possa acquisire grazie all'analisi di definizioni e risultati precisi. Il lavoro che proponiamo non prevede di essere riportato così com'è in una classe, ma dovrebbe rimanere, per così dire, "dietro le quinte": nella pratica didattica gli strumenti ottici potranno senz'altro essere presentati in modo intuitivo e informale, ma è compito dell'insegnante mantenere l'intuizione sul binario della correttezza. Nel seguito ci limiteremo alla descrizione dei microscopi infinitesimali e assumeremo che il lettore abbia familiarità con le proprietà fondamentali dei numeri iperreali.

7.2 La retta reale e i microscopi standard

I punti di una retta, intesa secondo la tradizionale impostazione assiomatica di Hilbert della geometria euclidea, sono in corrispondenza biunivoca con l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali. Si può parlare così della *retta reale* i cui punti, sebbene disposti in modo "denso", sono ben distinti. Ad esempio, i punti corrispondenti ai numeri 2 e $2,1$ (d'ora in avanti semplicemente i punti 2 e $2,1$) occupano posizioni diverse sulla retta, allo stesso modo dei punti 3 e $3,0001$. Ma cosa dire riguardo alla loro effettiva *visibilità*? Se disegnassimo una retta su un foglio millimetrato, assumendo 1 cm come unità di misura, riusciremmo chiaramente a distinguere a occhio nudo la prima coppia di punti, ma lo stesso non avverrebbe per la seconda: i due punti apparirebbero infatti confusamente sovrapposti e sembrerebbero collocarsi nella stessa posizione. In termini generali, possiamo affermare che numeri come a e $a + \frac{1}{n}$, con n "molto grande", sebbene corrispondano a punti differenti della retta, sono "troppo vicini" per essere visualizzati separatamente. Per ovviare a questo inconveniente dovremmo usare una sorta di lente d'ingrandimento che "separi" i due numeri e permetta di mostrare che sono effettivamente distinti. La situazione può essere rappresentata (in modo un po' accattivante) come in figura 7.1: all'interno del cerchio che rappresenta la lente i numeri 3 e $3,0001$ appaiono distinti, ma, per contro, non è più praticamente possibile visualizzare 2, che in questa scala risulta troppo lontano ed esce dal campo visivo (questa circostanza viene segnalata scherzosamente da un cartello).

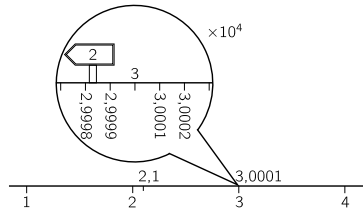


Figura 7.1: Attraverso la lente i numeri 3 e 3,0001 si vedono ben separati.

L'equivalente matematico di un tale strumento si può realizzare mediante la trasformazione $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\mu(x) = \frac{x - a}{\frac{1}{n}} = n(x - a)$$

che chiamiamo *microscopio standard* (figura 7.2). Il numero n rappresenta

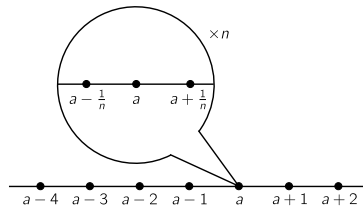


Figura 7.2: Microscopio standard che “separa” a da $a + \frac{1}{n}$.

il *fattore di ingrandimento* della trasformazione, dato che essa permette di distinguere chiaramente a , $a + \frac{1}{n}$, $a - \frac{1}{n}$, $a + \frac{2}{n}$, ecc. dopo averli messi in corrispondenza coi numeri ben distinti 0, 1, -1 , 2, ecc. Il passo conclusivo consiste nell'identificazione di ogni x con la sua immagine $\mu(x)^2$.

Questa stessa idea ci permetterà di rendere visibile anche il mondo iperreale infinitesimo.

7.3 La retta iperreale e i microscopi infinitesimali

L'insieme \mathbb{R}^* dei numeri iperreali, con le usuali operazioni e relazioni, è un campo ordinato non archimedeo contenente quindi, oltre ai numeri reali, numeri infinitamente piccoli, ovvero numeri ε tali che $0 < |\varepsilon| < \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e

²Questa identificazione, come suggerisce Tall [15], è analoga a quella che avviene nella realizzazione di una mappa geografica: la posizione di un luogo (ad es. “Lucca”) è denotata sulla mappa dal suo stesso nome (Lucca).

numeri infinitamente grandi, ovvero numeri H tali che $|H| > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si può vedere inoltre che ogni numero iperreale finito (cioè tale da essere in valore assoluto minore di qualche numero naturale) è sempre della forma $c + \varepsilon$, con $c \in \mathbb{R}$ e ε infinitesimo. Ebbene, la nostra intuizione geometrica della retta può corrispondere a questa struttura?

Il fatto che ad ogni numero reale possa essere assegnato un punto della retta geometrica risponde all'esigenza di concepire segmenti di lunghezze assegnate. Viceversa, il fatto che i numeri reali esauriscano tutti i punti di una retta è invece una conseguenza dell'accettazione incondizionata dell'impostazione assiomatica di Hilbert, che influenza e modella la nostra visione intuitiva della retta, ma che potrebbe essere assunta in modo non così restrittivo, almeno per quel che riguarda l'assioma archimedeo. Sarebbe infatti allo stesso modo legittimo pensare a una retta geometrica con elementi in più rispetto ai punti che corrispondono ai numeri reali (con punti "infinitamente lontani" e "infinitamente vicini") e riservare l'assioma di Archimede solo ai punti che corrispondono, per dirla come Leibniz, alle quantità "assegnabili" (di fatto, ai numeri reali standard). D'ora in avanti sarà questa la prospettiva da cui guarderemo alla retta geometrica. In altre parole *retta*, salvo avviso contrario, significherà per noi *retta iperreale*.

Se sulla retta non siamo in grado, alla scala ordinaria, di distinguere i punti 3 e $3+10^{-4}$, a maggior ragione non possiamo distinguere 3 e $3+\varepsilon$ (ε infinitesimo) dato che $|\varepsilon| < 10^{-4}$ (e anzi $|\varepsilon| < 10^{-n}$ per ogni n). Il discorso si generalizza facilmente: sulla retta iperreale numeri a distanza infinitesima non possono mai apparire distinti, anche dopo un ingrandimento di fattore n qualsiasi, e tutti gli elementi della monade di un numero reale *non sono visualizzabili separatamente* da esso, proprio come se tutta la monade vi "collassasse" sopra.

In definitiva, *sulla retta non è possibile distinguere tra loro numeri che differiscono di un infinitesimo perché essi appaiono sovrapposti all'unico numero reale cui sono infinitamente vicini*. Di conseguenza, dato che ciò che si può vedere (con o senza ingrandimenti standard) di un qualsiasi numero iperreale finito non è altro che *la sua parte standard*, l'immagine visiva della retta iperreale risulta identica (almeno per quanto riguarda la sua parte finita) a quella della retta reale. Tuttavia, essendo \mathbb{R}^* un campo ordinato, se $\varepsilon > 0$ è un infinitesimo e c un numero reale, i punti c , $c + \varepsilon$ e $c - \varepsilon$, seppur non a livello visuale, sono elementi distinti tali che $c - \varepsilon < c < c + \varepsilon$: per rappresentare graficamente questa situazione sulla retta si può procedere semplicemente come in figura 7.3.

Per rendere visibile la differenza fra c e $c + \varepsilon$ imitiamo quello che abbiamo fatto nel caso standard introducendo la trasformazione $\mu : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ definita da

$$\mu(x) = \frac{x - c}{\varepsilon}$$

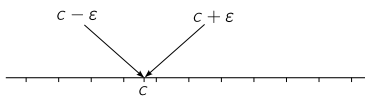


Figura 7.3: I punti c , $c - \varepsilon$ e $c + \varepsilon$ ($c \in \mathbb{R}$ e ε infinitesimo) sono visivamente indistinguibili sulla retta, ma si ha che $c - \varepsilon < c < c + \varepsilon$.

e identificando, al solito, ogni x con la sua immagine $\mu(x)$. Chiamiamo questa trasformazione *microscopio infinitesimale* o *non standard*. Dato che $\mu(c) = 0$,

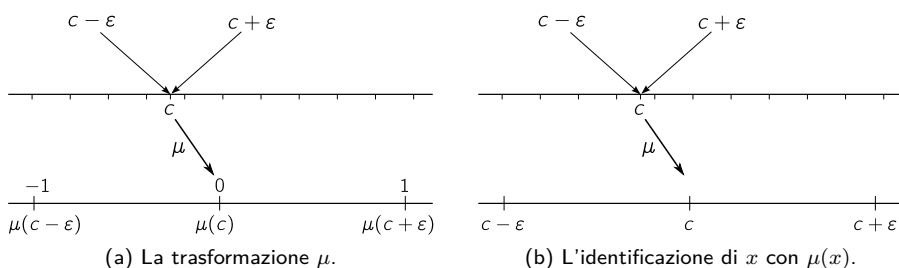


Figura 7.4: La trasformazione μ permette di rappresentare i numeri $c - \varepsilon$ e $c + \varepsilon$ sulla retta reale, separati da c .

$\mu(c + \varepsilon) = 1$ e $\mu(c - \varepsilon) = -1$, nell'immagine del microscopio i punti c , $c + \varepsilon$ e $c - \varepsilon$ risultano ben distinti, sebbene abbiano distanza infinitesima (figura 7.4).

Ciò nonostante si rendono necessarie alcune precisazioni. Se calcoliamo l'immagine tramite μ del numero iperreale non reale $c + \varepsilon^2$, anch'esso infinitamente vicino a c , troviamo

$$\mu(c + \varepsilon^2) = \frac{c + \varepsilon^2 - c}{\varepsilon} = \varepsilon \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}$$

ovvero ancora un numero iperreale non reale, che non riusciamo a distinguere dall'unico numero reale cui è infinitamente vicino, che in questo caso è 0. Di conseguenza anche c e $c + \varepsilon^2$ risultano indistinguibili. È conveniente esplicitare questo passaggio che assegna la posizione del punto nell'immagine della lente considerando la *parte standard* di μ , cioè applicando la funzione

$$\bar{\mu}(x) = \text{st}(\mu(x)) = \text{st}\left(\frac{x - c}{\varepsilon}\right)$$

che chiamiamo *microscopio ottico*. Così $\bar{\mu}(c) = 0$, $\bar{\mu}(c + \varepsilon) = 1$, $\bar{\mu}(c - \varepsilon) = -1$ e ancora $\bar{\mu}(c + \varepsilon^2) = 0$, in modo che il numero $c + \varepsilon^2$ si veda effettivamente sovrapposto a c (figura 7.5). La nuova funzione considerata, dunque, non è

iniettiva, ma questo fatto si può interpretare facilmente: il microscopio utilizzato non è “sufficientemente potente” da riuscire a separare i due numeri per il fatto che $c + \varepsilon^2$ è molto più vicino a c di quanto lo sia $c + \varepsilon$. Vedremo meglio fra poco perché.

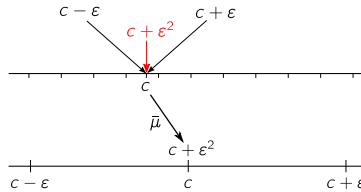


Figura 7.5: I numeri c e $c + \varepsilon^2$ risultano ancora non separati tramite $\bar{\mu}$.

Facciamo il punto della situazione e mettiamo ordine alle idee esposte finora, cominciando dalla definizione formale di microscopio ottico³.

Definizione 7.3.1. Siano $c \in \mathbb{R}^*$ e $\varepsilon > 0$ un *infinitesimo*. La funzione

$$\mu: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, \quad \mu(x) = \frac{x - c}{\varepsilon}$$

è chiamata *lente- ε puntata in c* . Il campo visivo della lente è l'insieme

$$C_\mu = \{x \in \mathbb{R}^* \mid \mu(x) \text{ è finito}\}.$$

Considerando la parte standard di μ , otteniamo la funzione

$$\bar{\mu}: C_\mu \rightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{\mu}(x) = \text{st}\left(\frac{x - c}{\varepsilon}\right)$$

chiamata *lente- ε ottica puntata in c (o microscopio ottico)*.

L'aggettivo “ottico” si riferisce al fatto che si è passati alla parte standard della lente, che permette di assegnare esplicitamente la posizione nell'immagine. Il campo visivo è il dominio della corrispondente lente ottica e rappresenta l'insieme dei numeri che poi appaiono nell'immagine finale, dove di fatto ne viene riprodotta però solo una parte racchiusa in un cerchio centrato generalmente (ma non sempre è così) nel punto di applicazione della lente.

Anche per i microscopi standard è utile considerare le lenti ottiche passando alla parte standard di μ . In questo modo anch'essi possono rientrare nella

³Il ricorso alla parte standard è la modifica proposta da Tall [14, 15] alla definizione originaria di cui si parlava nell'introduzione. Questa scelta rimane coerente con l'impostazione di Keisler [9, p. 65 ss., ed. online p. 35 ss.], ma, come sarà chiaro nel seguito, risulta particolarmente vantaggiosa nell'applicazione degli strumenti ottici ai grafici delle curve nel piano, poiché consente una migliore esplicazione dei passaggi.

definizione 7.3.1 se sostituiamo ε con $\frac{1}{n}$: il vantaggio è che la funzione così ottenuta rimane definita anche per i numeri non standard compresi nel campo visivo, in coerenza col fatto che nessuna lente standard è in grado di distinguere i dettagli infinitesimali per qualsiasi fattore di ingrandimento. Ad esempio, in figura 7.6 il microscopio standard ingrandisce di un fattore $n \in \mathbb{N}$ e manda l'infinitesimo ε in 0, mentre il microscopio non standard, ingrandendo di un fattore infinito $\frac{1}{\varepsilon}$, riesce a separarlo da esso. Infatti

$$\bar{\mu}_{\text{st}}(\varepsilon) = \text{st}\left(\frac{\varepsilon - 0}{\frac{1}{n}}\right) = 0 \quad \bar{\mu}_{\text{non-st}}(\varepsilon) = \text{st}\left(\frac{\varepsilon - 0}{\varepsilon}\right) = 1.$$

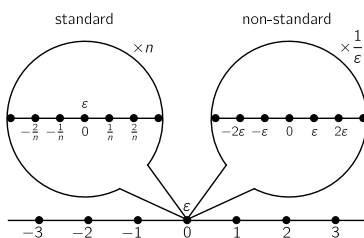


Figura 7.6: Microscopio standard e non standard.

Nel seguito parleremo semplicemente di lenti o microscopi anziché di lenti ottiche o microscopi ottici, qualora non si renda necessaria la distinzione: il contesto permetterà di chiarire se ci staremo riferendo o meno al risultato finale della visualizzazione.

Occorre ora introdurre una relazione fra infinitesimi, fondamentale per stabilire l'effettiva *potenza* di un microscopio infinitesimale e comprendere quale livello di dettagli può rivelare.

Definizione 7.3.2. *Dati due infinitesimi non nulli ε e δ , diciamo che*

- i) ε ha ordine superiore rispetto a δ se $\frac{\varepsilon}{\delta}$ è infinitesimo. Scriviamo in tal caso $\varepsilon = o(\delta)$;
- ii) ε ha lo stesso ordine di δ se $\frac{\varepsilon}{\delta}$ è finito non infinitesimo;
- iii) ε ha ordine inferiore rispetto a δ se $\frac{\varepsilon}{\delta}$ è infinito. Scriviamo in tal caso $\delta = o(\varepsilon)$.

Intuitivamente, se ε ha ordine superiore rispetto a δ significa che ε è infinitesimo anche rispetto a δ : in un ingrandimento in cui δ e 0 sono visibili e ben separati, ε rimane comunque sovrapposto a 0. Questa intuizione ha un perfetto

riscontro nei microscopi ottici: in figura 7.5 i numeri $c + \varepsilon^2$ e c non risultano distinti perché il microscopio è in grado di separare solo numeri che differiscono di un infinitesimo dello stesso ordine di ε , mentre ε^2 è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a ε (in simboli, $\varepsilon^2 = o(\varepsilon)$).

Queste considerazioni conducono a chiederci come caratterizzare esattamente i particolari che possono essere rivelati da una lente- ε puntata in $c \in \mathbb{R}^*$. La risposta è che si possono distinguere separati da c effettivamente solo numeri del tipo

$$c + \lambda$$

dove λ è un infinitesimo dello stesso ordine di ε , come si può facilmente verificare⁴. Se λ fosse di ordine superiore rispetto a ε , il numero $c + \lambda$ non si distinguerebbe da c (i dettagli infinitesimali di ordine superiore sarebbero troppo piccoli per essere visti); se λ fosse invece di ordine inferiore, l'immagine di $c + \lambda$ sarebbe infinita e dunque il numero $c + \lambda$ risulterebbe fuori dal campo visivo.

Ancora più in generale, possiamo affermare che *due punti nel campo visivo di una lente- ε che differiscono di un infinitesimo di ordine superiore rispetto a ε appaiono uguali attraverso di essa*.

La figura 7.7 mostra due microscopi non standard puntati in 0 con ingrandimenti di ordini differenti: la lente- ε riesce a separare ε da 0, da cui però non riesce a separare ε^2 ; la lente- ε^2 riesce a separare ε^2 da 0, ma non riesce più a visualizzare ε , che è uscito dal suo campo visivo perché “troppo lontano”: pur essendo (in assoluto) infinitesimo, relativamente a ε^2 si comporta come se fosse infinito⁵.

7.4 Microscopi puntati in microscopi

A volte può essere didatticamente efficace applicare un microscopio nell'immagine di un altro microscopio, anziché applicare direttamente una lente più

⁴Per farsi un'idea della situazione, si pensi ai numeri del tipo $c + r\varepsilon$ con r che varia in \mathbb{R} . In effetti, $r\varepsilon$ è un infinitesimo dello stesso ordine di ε e l'immagine di $c + r\varepsilon$ attraverso la lente- ε ottica è proprio r . Dato che ai fini della visualizzazione conta solo la parte standard, si vede che questi numeri sono già sufficienti per completare l'immagine della lente, nel senso che ogni altro numero della monade di c che rientra nel campo visivo avrebbe comunque la stessa immagine di $c + r\varepsilon$ per qualche $r \in \mathbb{R}$.

⁵Questo è proprio il significato intuitivo di $\varepsilon^2 = o(\varepsilon)$. Si noti inoltre l'analogia con la visualizzazione al microscopio standard: come abbiamo visto in precedenza, concentrando con un ingrandimento standard la visione su un dettaglio della retta è inevitabile portare fuori campo alcuni numeri e non riuscire comunque a distinguere dettagli più fini. Nell'esempio di figura 7.1, la risoluzione consente di distinguere i numeri 3 e $3 + n \times 10^{-4}$, ma dal campo visivo scompare il 2 (e a maggior ragione l'1 e il 10) e certamente non distingueremo $3 + 10^{-8}$ né $3 - 2 \times 10^{-10}$. Questo limite naturale che si riscontra nell'efficacia del microscopio standard è analogo ai limiti del microscopio non standard nel visualizzare infinitesimi di ordine diverso.

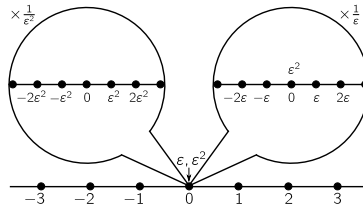


Figura 7.7: Microscopi non standard con ingrandimenti di ordini differenti.

potente, allo scopo di rendere espliciti e chiarificare i passi di un processo o di una spiegazione.

Definizione 7.4.1. *Un microscopio puntato in un microscopio è una lente ottica applicata in un punto di un'altra lente non-ottica.*

Applicare un microscopio in un altro equivale a comporre due funzioni: tecnicamente, la prima lente applicata μ_1 non deve essere ottica (altrimenti perderebbe tutti i dettagli infinitesimali), mentre la seconda $\bar{\mu}_2$, applicata nell'immagine della prima, lo è. Si ottiene così la funzione composta $\bar{\mu}_2 \circ \mu_1$. Nella trasposizione grafica, comunque, anche la prima lente μ_1 può essere calcolata come ottica per poter essere rappresentata in modo semplice, come mostra la figura 7.8.

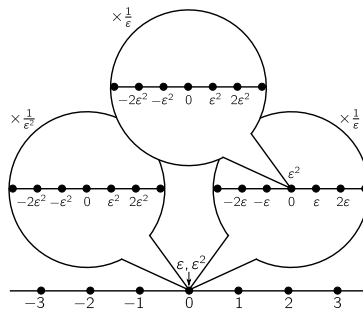


Figura 7.8: Microscopio non standard puntato in un altro microscopio.

Come si può notare, puntare un microscopio dentro un altro equivale ad applicare un solo microscopio il cui fattore di scala è il prodotto di quelli degli altri due microscopi: l'immagine finale è esattamente la stessa. Fissiamo questo fatto nel seguente lemmino.

Lemmino. *L'immagine di una lente- ε applicata a un punto di un'altra lente- ε coincide con l'immagine di una lente- ε^2 applicata allo stesso punto.*

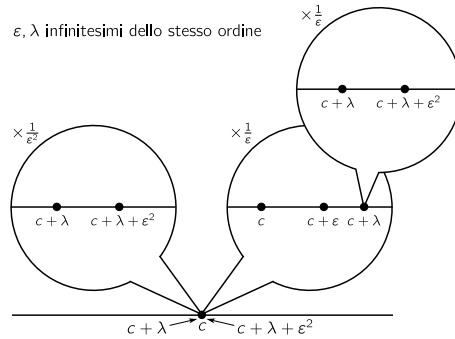


Figura 7.9: Equivalenza di microscopi.

Dimostrazione del lemmino. Sia $c \in \mathbb{R}^*$. Si voglia applicare una lente- ε nell'immagine, prodotta da un'altra lente- ε , del punto $c + \lambda$, dove λ è un infinitesimo dello stesso ordine di ε (oppure $\lambda = 0$). La prima lente- ε e la seconda (puntata nella prima) sono definite rispettivamente da

$$\mu_1(x) = \frac{x - c}{\varepsilon} \quad \text{e} \quad \mu_2(x) = \frac{x - \mu_1(c + \lambda)}{\varepsilon}$$

e la loro composizione dà

$$\mu_2(\mu_1(x)) = \frac{\mu_1(x) - \mu_1(c + \lambda)}{\varepsilon} = \frac{\frac{x - c}{\varepsilon} - \frac{c + \lambda - c}{\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{x - (c + \lambda)}{\varepsilon^2} = \frac{x - (c + \lambda)}{\varepsilon^2}$$

che rappresenta una lente- ε^2 puntata in $c + \lambda$ (figura 7.9). \square

7.5 Funzioni derivabili e microscopi in due dimensioni

La generalizzazione a più dimensioni dei microscopi fin qui considerati è immediata: basta applicare una lente ad ogni coordinata. Interessante è il caso bidimensionale, che si rivela particolarmente adeguato alla descrizione locale del grafico di una funzione nel piano \mathbb{R}^2 .

Definizione 7.5.1. Siano $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{*2}$ e $\varepsilon > 0$ un infinitesimo. La funzione

$$\mu: \mathbb{R}^{*2} \rightarrow \mathbb{R}^{*2}, \quad \mu(x, y) = \left(\frac{x - \alpha}{\varepsilon}, \frac{y - \beta}{\varepsilon} \right)$$

è chiamata lente- ε puntata in (α, β) . Il campo visivo della lente è l'insieme

$$C_\mu = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{*2} \mid \mu(x, y) \text{ è finito}\}.$$

Considerando la parte standard di μ , otteniamo la funzione

$$\bar{\mu}: C_\mu \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \bar{\mu}(x, y) = \text{st}\left(\frac{x - \alpha}{\varepsilon}, \frac{x - \beta}{\varepsilon}\right)$$

chiamata lente- ε ottica puntata in (α, β) (o microscopio ottico).

Vediamo come usare questi strumenti per esplorare il mondo delle funzioni. Nel seguito, come avviene solitamente, eviteremo l'esplicito riferimento all'estensione naturale iperreale delle funzioni coinvolte. Data una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $a \in \mathbb{R}$, indichiamo con dx un incremento infinitesimo positivo di a . L'obiettivo è vedere come appare il grafico della curva $y = f(x)$ in un intorno infinitesimale del punto $(a, f(a))$, per il quale ci serviremo di un microscopio. È ben noto che l'incremento della variabile dipendente⁶

$$dy = f(a + dx) - f(a)$$

e l'incremento lungo la tangente nel punto considerato

$$f'(a)dx$$

differiscono di un infinitesimo di ordine superiore rispetto a dx , cioè si ha

$$f(a + dx) = f(a) + f'(a)dx + \varepsilon dx$$

dove ε è un infinitesimo (che dipende da a e da dx). Puntiamo una lente- dx ottica in $(a, f(a))$, ovvero applichiamo la funzione

$$\bar{\mu}(x, y) = \text{st}\left(\frac{x - a}{dx}, \frac{y - f(a)}{dx}\right).$$

Allora avremo

$$(a, f(a)) \mapsto (0, 0)$$

mentre per il punto del grafico corrispondente all'incremento dx

$$(a + dx, f(a + dx)) \mapsto \text{st}(1, f'(a) + \varepsilon) = (1, f'(a)).$$

Per capire cosa accade a tutti i punti del grafico infinitamente vicini a $(a, f(a))$, consideriamo un altro incremento infinitesimo λ e vediamo dove si colloca l'immagine al microscopio del corrispondente punto

$$(a + \lambda, f(a + \lambda)).$$

⁶Preferiamo adottare il simbolo di differenziale dy per denotare l'incremento della funzione anziché quello della tangente, alla maniera di Robinson [11, p. 79, ed. it. p. 111] e secondo le raccomandazioni di Goldoni [7].

Attraverso la lente- dx ottica, esso appare come

$$\left(\text{st}\left(\frac{\lambda}{dx}\right), \text{st}\left(\frac{f'(a)\lambda + \lambda\varepsilon}{dx}\right) \right) = \left(\text{st}\left(\frac{\lambda}{dx}\right), \text{st}\left(\frac{f'(a)\lambda}{dx} + \frac{\lambda\varepsilon}{dx}\right) \right).$$

Ora, se λ ha lo stesso ordine di dx (e sappiamo che solo questi possono essere coinvolti nella visualizzazione con una lente- dx ottica⁷), allora λ/dx è finito e $\lambda\varepsilon/dx$ è infinitesimo. Quindi

$$(a + \lambda, f(a + \lambda)) \mapsto \left(\text{st}\left(\frac{\lambda}{dx}\right), f'(a) \text{st}\left(\frac{\lambda}{dx}\right) \right)$$

e posto $t = \text{st}(\lambda/dx)$, si ha che i punti di $y = f(x)$ che rientrano nel campo visivo della lente vengono mandati nella curva parametrica

$$(t, f'(a)t)$$

con t come parametro. Ciò significa che attraverso la lente il grafico della funzione si vede come una retta con pendenza esattamente la derivata nel punto. Naturalmente questa retta è anche la tangente al grafico della funzione nel punto stesso. Possiamo allora affermare che *il grafico di una funzione reale f derivabile in $a \in \mathbb{R}$ e la retta ad esso tangente in $(a, f(a))$ appaiono indistinguibili in un intorno infinitesimale di $(a, f(a))$ se visti attraverso una lente ottica*⁸ (figura 7.10).

7.6 Funzioni derivabili e microscopi puntati in microscopi

Vediamo ora come possono essere applicati i microscopi puntati in microscopi per studiare altre proprietà delle funzioni reali.

Sia f una funzione reale derivabile due volte in a . Puntiamo in $(a+dx, f(a+dx))$, dentro la lente- dx considerata in precedenza, un'altra lente- dx . Grazie al lemmine, ciò può essere realizzato puntando direttamente in $(a+dx, f(a+dx))$ la lente- dx^2 definita da

$$(x, y) \mapsto \text{st}\left(\frac{x - (a + dx)}{dx^2}, \frac{y - f(a + dx)}{dx^2}\right).$$

⁷Analogamente a prima, è sufficiente riferirsi a numeri del tipo $r dx$, con $r \in \mathbb{R}$.

⁸Osserviamo che la trattazione precedente è stata possibile grazie alla proposta di Tall di considerare le parti standard nelle lenti ottiche, in particolare per la scrittura in forma parametrica dell'equazione della retta all'interno dell'immagine della lente. Procederemo in modo simile anche nella prossima sezione.

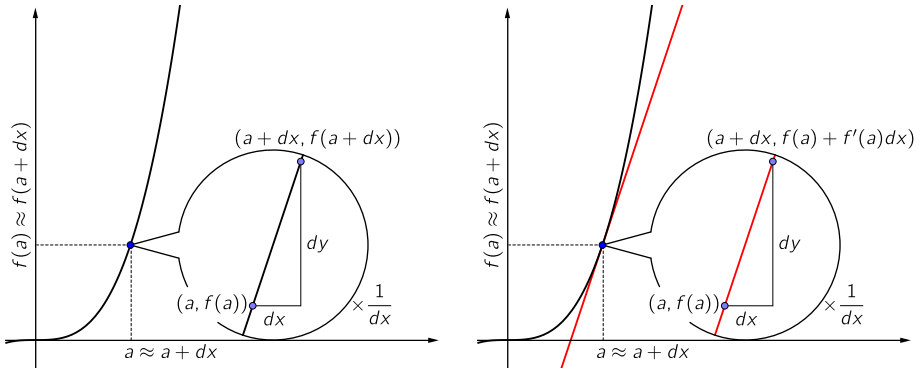


Figura 7.10: Attraverso un microscopio ottico, la curva e la tangente risultano indistinguibili.

Sviluppiamo $f(a + dx)$ con la formula di Taylor del secondo ordine⁹

$$f(a + dx) = f(a) + f'(a)dx + \frac{1}{2}f''(a)dx^2 + \varepsilon_1 dx^2$$

dove ε_1 è un infinitesimo.

Diamo ad $a + dx$ un ulteriore incremento λ dello stesso ordine di dx^2 e vediamo, usando ancora la formula di Taylor, qual è l'immagine di

$$(a + dx + \lambda, f(a + dx + \lambda)).$$

Si ha

$$f(a + dx + \lambda) = f(a) + f'(a)(dx + \lambda) + \frac{1}{2}f''(a)(dx + \lambda)^2 + \varepsilon_2(dx + \lambda)^2$$

dunque

$$\begin{aligned} (a + dx + \lambda, f(a + dx + \lambda)) &\mapsto \text{st}\left(\frac{\lambda}{dx^2}, \frac{f(a + dx + \lambda) - f(a + dx)}{dx}\right) = \\ &= \text{st}\left(\frac{\lambda}{dx^2}, \frac{f'(a)\lambda + \frac{1}{2}f''(a)\lambda^2 + f''(a)dx\lambda + \varepsilon_2 dx^2 + \varepsilon_2 \lambda^2 + 2\varepsilon_2 dx\lambda - \varepsilon_1 dx^2}{dx^2}\right) \end{aligned}$$

e passando alle parti standard, la lente ottica dà

$$\left(\text{st}\left(\frac{\lambda}{dx^2}\right), f'(a) \text{st}\left(\frac{\lambda}{dx^2}\right)\right).$$

⁹Si veda ad esempio [13, p. 88].

Lungo la tangente, il punto corrispondente allo stesso incremento λ sarà

$$(a + dx + \lambda, f(a) + f'(a)(dx + \lambda)).$$

Calcoliamo la sua immagine

$$\begin{aligned} & \text{st}\left(\frac{\lambda}{dx^2}, \frac{f'(a)(dx + \lambda) - f'(a)dx - \frac{1}{2}f''(a)dx^2 - \varepsilon_1 dx^2}{dx^2}\right) = \\ & = \text{st}\left(\frac{\lambda}{dx^2}, \frac{\lambda f'(a) - \frac{1}{2}f''(a)dx^2 - \varepsilon_1 dx^2}{dx^2}\right) = \text{st}\left(\frac{\lambda}{dx^2}, f'(a)\frac{\lambda}{dx^2} - \frac{1}{2}f''(a) - \varepsilon_1\right) \end{aligned}$$

ed esplicitiamo le parti standard

$$\left(\text{st}\left(\frac{\lambda}{dx^2}\right), f'(a)\text{st}\left(\frac{\lambda}{dx^2}\right) - \frac{1}{2}f''(a)\right).$$

In definitiva, assegnando ad $a + dx$ incrementi infinitesimi λ dello stesso ordine di dx^2 e ponendo $t = \text{st}(\lambda/dx^2)$, attraverso una lente- dx puntata in $(a+dx, f(a+dx))$ nell'immagine di un'altra lente- dx puntata in $(a, f(a))$ o, il che è lo stesso, attraverso una lente- dx^2 puntata direttamente in $(a+dx, f(a+dx))$, il grafico della funzione e quello della tangente appaiono come le seguenti curve parametriche

$$\begin{aligned} \text{funzione} & \rightarrow (t, f'(a)t) \\ \text{tangente} & \rightarrow \left(t, f'(a)t - \frac{1}{2}f''(a)\right) \end{aligned}$$

cioè vengono viste come due rette parallele di pendenza $f'(a)$. La situazione è illustrata in figura 7.11. Inoltre, osservando il segno della derivata seconda $f''(a)$, si trova che

$f''(a) > 0 \Rightarrow f$ concava verso l'alto, cioè la tangente sta sotto il grafico di f ;

$f''(a) < 0 \Rightarrow f$ concava verso il basso, cioè la tangente sta sopra il grafico di f .

Questa particolare visualizzazione, ottenuta attraverso il doppio microscopio, è tratta da [8, p. 57] e [9, p. 67, ed. online p. 37], nei quali tuttavia le spiegazioni rimangono a un livello più intuitivo che formale. La nostra trattazione ha consentito di stabilirne comunque la correttezza e la coerenza, permettendo altresì ulteriori osservazioni sulla concavità.

7.7 Una semplice applicazione

All'inizio del volume [4] dedicato ai numeri iperreali, G. Goldoni mostra come sia possibile risolvere, ragionando con gli infinitesimi e utilizzando i microscopi

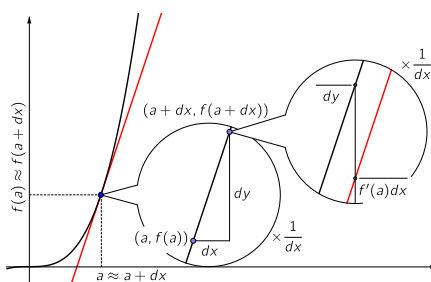


Figura 7.11: Microscopio puntato in un altro microscopio per l'analisi di una funzione derivabile due volte.

in modo intuitivo, senza entrare eccessivamente in profondità nel calcolo differenziale, il problema di trovare l'ascissa del vertice di una parabola con asse parallelo all'asse y . Nello stesso spirito, vorremmo mostrare come anche gli strumenti ottici che abbiamo descritto, applicati al grafico di una funzione sufficientemente regolare, oltre a fornire una rappresentazione molto suggestiva di ciò che avviene nell'intorno infinitesimale di un punto, possano essere sfruttati informalmente per risolvere alcune classi di problemi.

Proponiamo di seguito un'applicazione che vuole solo essere un esempio e non ha la pretesa di porsi come metodo sostitutivo allo studio delle derivate. Si tratta di affrontare il seguente problema: *trovare in quale punto il grafico di una funzione polinomiale di terzo grado cambia concavità, ovvero dove presenta un punto di flesso*. Chiediamoci innanzitutto come deve comportarsi una funzione in un intorno infinitesimale di un punto siffatto. Alla luce di quanto appena appreso, in un punto in cui la concavità si volge verso l'alto o verso il basso, il grafico della tangente visualizzato nel secondo microscopio appare rispettivamente sotto o sopra quello della funzione. Ma un punto di flesso è un punto speciale in cui il grafico è *privo* di concavità. Come si traduce questo fatto nella visualizzazione ottica? È ragionevole pensare che attraverso la seconda lente il grafico della tangente e quello della funzione debbano apparire ancora indistinguibili, poiché questo è l'unico modo che non fa ricadere il punto in uno dei due tipi di concavità (figura 7.12). La cosa viene in effetti confermata dai nostri calcoli precedenti: se f è una funzione derivabile due volte in un punto a dove presenta un flesso, si ha $f''(a) = 0$ e l'equazione parametrica della tangente va a coincidere con quella della funzione¹⁰.

Si consideri la funzione il cui grafico è la curva di equazione $y = x^3 - 2x^2$ e si vogliono cercare i punti in cui si ha cambiamento di concavità, che saranno

¹⁰Sfruttiamo l'occasione per ribadire ancora una volta che l'obiettivo della formalizzazione degli strumenti ottici è proprio quello di garantire la correttezza della visualizzazione ispirata dall'intuizione.

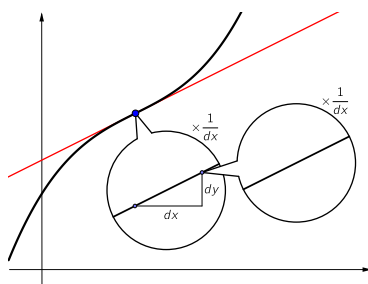


Figura 7.12: Microscopio in un microscopio puntato in un flesso, dove non c'è concavità.

dunque quelli per i quali un secondo microscopio visualizza un'unica retta (cioè dove non rileva distanza verticale fra la curva e la tangente). Considerato un incremento infinitesimo dx della variabile indipendente, calcoliamo l'incremento corrispondente dy della variabile dipendente

$$\begin{aligned} dy &= (x + dx)^3 - 2(x + dx)^2 - (x^3 - 2x^2) = \\ &= \cancel{x^3} + 3x^2 dx + 3x dx^2 + dx^3 - \cancel{2x^2} - 4x dx - 2dx^2 - \cancel{x^3} + \cancel{2x^2} = \\ &= (3x^2 - 4x)dx + (3x - 2)dx^2 + dx^3. \end{aligned}$$

Si noti che l'uguaglianza scritta non è altro che la formula di Taylor di ordine 2, in cui vengono messi in evidenza tre addendi infinitesimi dello stesso ordine rispettivamente di dx , dx^2 e dx^3 . Il primo addendo (di ordine dx) rappresenta l'incremento che viene rilevato dal primo microscopio (di fattore $1/dx$), mentre il secondo è l'incremento rilevato dal secondo microscopio nell'immagine del primo, cioè la distanza verticale fra la curva e la tangente (gli infinitesimi di ordine superiore vengono invece trascurati). In sintesi

$$dy = \underbrace{(3x^2 - 4x)dx}_{\text{incremento rilevato dal 1° microscopio}} + \underbrace{(3x - 2)dx^2}_{\text{incremento rilevato dal 2° microscopio}} + \underbrace{dx^3}_{\text{infinitesimo di ordine superiore (trascurato)}}$$

e il punto cercato sarà quello per cui l'incremento di ordine dx^2 rilevato dal secondo microscopio è nullo. Ciò si realizza se

$$3x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}$$

che è proprio il punto di flesso della funzione data¹¹ (figura 7.13).

¹¹Annullando invece il termine di ordine dx si trovano i punti di massimo e minimo, cioè i punti per i quali il primo microscopio non rileva alcun incremento della funzione, che appare così indistinguibile dalla tangente orizzontale, esattamente come in [4].

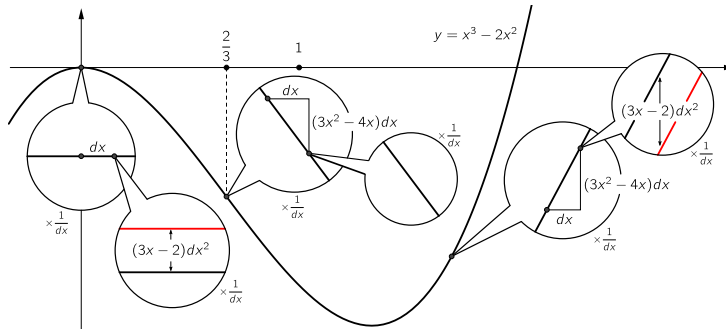


Figura 7.13: Uso dei microscopi per la ricerca dei flessi di $y = x^3 - 2x^2$.

Vogliamo concludere questo nostro intervento con un'ultima breve riflessione. L'uso dei microscopi infinitesimali, le relative spiegazioni e i metodi conseguenti trovano la loro naturale collocazione nell'analisi non standard, anzi si può dire siano una parte di essa. Crediamo che questo aspetto possa contribuire a porre l'analisi non standard un gradino più in alto rispetto all'analisi classica, se non in termini di risultati matematici, certamente a livello di metodologia didattica.

Bibliografia

- [1] J. Bair and V. Henry. Implicit differentiation with microscopes. *The Mathematical Intelligencer*, 32(1):53–55, 2010. <http://orbi.ulg.ac.be/bitstream/2268/13591/1/ImplicitDiff>.
- [2] J. Bair and V. Henry. Osculating circle with microscopes within microscopes. *Foundations of Science*, 18(2):319–325, 2013.
- [3] R. Dossena and L. Magnani. Mathematics through diagrams: Microscopes in non-standard and smooth analysis. In L. Magnani and P. Li, editors, *Model-Based Reasoning in Science, Technology, and Medicine*, pages 193–213. Springer Berlin Heidelberg, 2007. <https://independent.academia.edu/RiccardoDossena>.
- [4] G. Goldoni. *Il professor Apotema insegna... i numeri iperreali*. Ilmiolibro.it, 2011. Seconda edizione, 2014. <https://planetariodimodena.academia.edu/GiorgioGoldoni>.
- [5] G. Goldoni. *Il professor Apotema insegna... il calcolo delle differenze e il calcolo differenziale*. Ilmiolibro.it, 2011. Seconda edizione, 2014. <https://planetariodimodena.academia.edu/GiorgioGoldoni>.

- [6] G. Goldoni. *Il professor Apotema insegna... il calcolo delle somme e il calcolo integrale*. Ilmiolibro.it, 2012. Seconda edizione, 2014. <https://planetariodimodena.academia.edu/GiorgioGoldoni>.
- [7] G. Goldoni. *Il differenziale alla Robinson in una e più variabili*, pages 21–31. *Matematicamente.it*, 2014. Atti del convegno, Vicenza, 7 novembre 2014. <https://planetariodimodena.academia.edu/GiorgioGoldoni>.
- [8] H. J. Keisler. *Elementary Calculus*. Prindle, Weber and Schmidt, Boston, 1976. Tr. it. di R. Ferro, G. Sambin, L. Colussi, A. Facchini, A. Le Donne. *Elementi di analisi matematica*. Piccin Editore, Padova, 1982. <https://www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html>.
- [9] H. J. Keisler. *Foundations of Infinitesimal Calculus*. Prindle, Weber and Schmidt, Boston, 1976. On-line Edition, 2007. <https://www.math.wisc.edu/~keisler/foundations.html>.
- [10] L. Magnani and R. Dossena. Perceiving the infinite and the infinitesimal world: unveiling and optical diagrams in mathematics. *Foundations of Science*, 10(1):7–23, 2005. <https://independent.academia.edu/RiccardoDossena>.
- [11] A. Robinson. *Non-Standard Analysis*. North Holland, Amsterdam, 1966. Revised Edition, Princeton University Press, 1996. Tr. it. di F. Bedini. *Analisi non standard*. Aracne editrice, Roma, 2013.
- [12] B. Stecca e D. Zambelli. *Analisi non standard*. Manuale in costruzione. <http://nsa.readthedocs.org>.
- [13] K. D. Stroyan. *Mathematical Background: Foundations of Infinitesimal Calculus*. Academic Press, 1997.
<http://homepage.math.uiowa.edu/~stroyan/InfsmlCalculus/FoundInfsmlCalc>.
- [14] D. Tall. Elementary axioms and pictures for infinitesimal calculus. *Bulletin of the IMA*, 18:43–48, 1982.
<http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1982b-axioms-for-infls.pdf>.
- [15] D. Tall. Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2):199–238, 2001.
<http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001p-esm-infinity>.