L'analisi non standard

Il calcolo da Leibniz a Robinson

Riccardo Dossena

Università degli Studi di Pavia

21 aprile 2010

Cos'è la matematica?

"[La matematica è] la disciplina nella quale non sappiamo mai di che cosa stiamo parlando né se ciò che diciamo è vero."

Bertrand Russell – 1901

La nascita del calcolo infinitesimale – XVII secolo

Interesse per la ricerca della tangente a una curva:

Motivazioni

La nascita del calcolo infinitesimale – XVII secolo

Interesse per la ricerca della tangente a una curva:

Motivazioni

1. *Ottica*: studio del passaggio della luce attraverso una lente – angolo di riflessione/rifrazione

La nascita del calcolo infinitesimale – XVII secolo

Interesse per la ricerca della tangente a una curva:

Motivazioni

1. *Ottica*: studio del passaggio della luce attraverso una lente – angolo di riflessione/rifrazione
2. *Meccanica*: studio del moto – la direzione di un corpo mobile in ciascun punto della sua traiettoria coincide con la direzione della tangente alla traiettoria nel punto;

La nascita del calcolo infinitesimale – XVII secolo

Interesse per la ricerca della tangente a una curva:

Motivazioni

1. *Ottica*: studio del passaggio della luce attraverso una lente – angolo di riflessione/rifrazione
2. *Meccanica*: studio del moto – la direzione di un corpo mobile in ciascun punto della sua traiettoria coincide con la direzione della tangente alla traiettoria nel punto;
3. Problema di *geometria pura*

I fondatori riconosciuti del calcolo infinitesimale

Gottfried Wilhelm von Leibniz
(1646–1716)

Isaac Newton
(1642–1727)

La tangente a una curva in un punto - Due intuizioni

Ad ogni punto $M_0 = (x_0, f(x_0))$ di una curva C è in generale possibile associare una tangente $T_f(x_0)$ definita come la retta che approssima meglio C in M_0 (si dice in questo caso che il "contatto" di tale retta con C in M_0 è massimale).

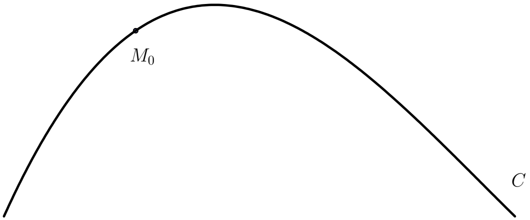
La tangente a una curva in un punto - Due intuizioni

Ad ogni punto $M_0 = (x_0, f(x_0))$ di una curva C è in generale possibile associare una tangente $T_f(x_0)$ definita come la retta che approssima meglio C in M_0 (si dice in questo caso che il "contatto" di tale retta con C in M_0 è massimale).

Ci sono due modi per avere intuizione di una tangente: uno "dinamico" e l'altro "statico".

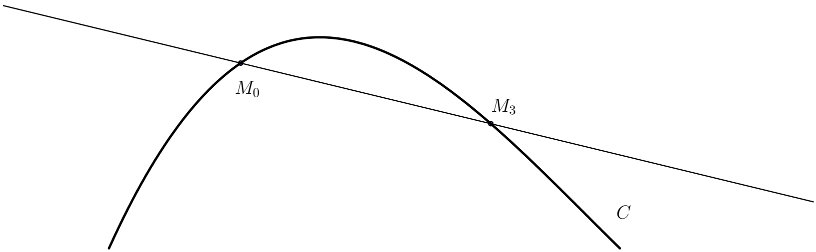
Intuizione dinamica

- La tangente $T_f(x_0)$ è il limite delle secanti $M_0 M_n$ di C quando il punto M_n tende verso il punto M_0.



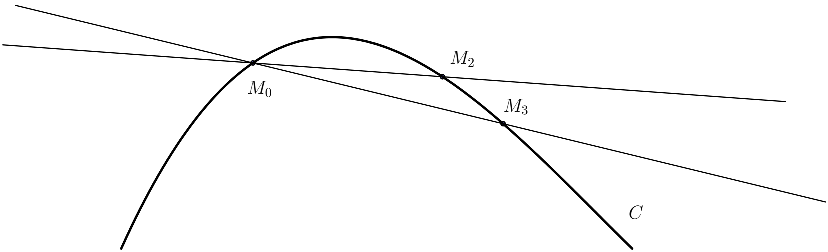
Intuizione dinamica

- La tangente $T_f(x_0)$ è il limite delle secanti M_0M_n di C quando il punto M_n tende verso il punto M_0.



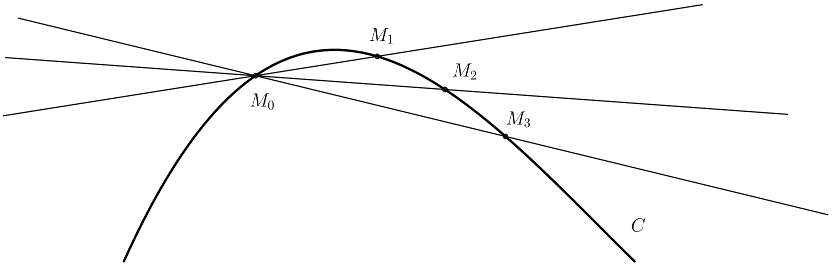
Intuizione dinamica

- La tangente $T_f(x_0)$ è il limite delle secanti M_0M_n di C quando il punto M_n tende verso il punto M_0.



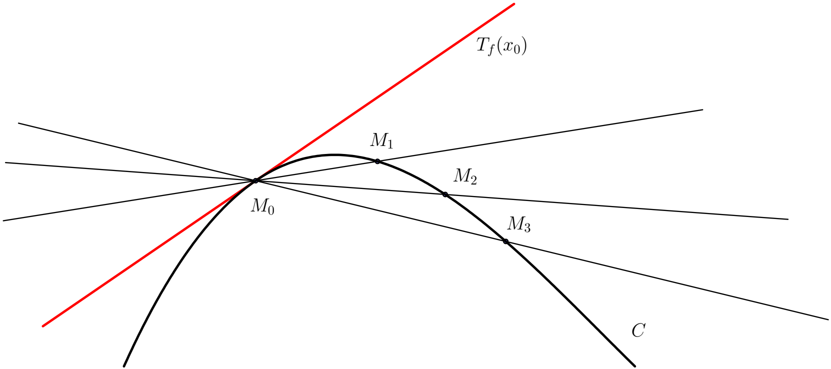
Intuizione dinamica

- La tangente $T_f(x_0)$ è il limite delle secanti M_0M_n di C quando il punto M_n tende verso il punto M_0.



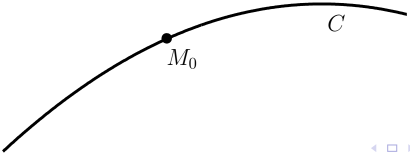
Intuizione dinamica

- La tangente $T_f(x_0)$ è il limite delle secanti M_0M_n di C quando il punto M_n tende verso il punto M_0.



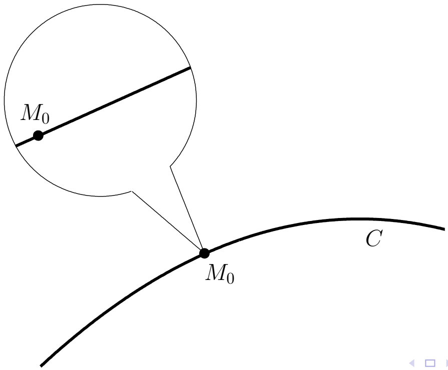
Intuizione statica

- La tangente non è definita da un processo (passaggio al limite), bensì da una *posizione*. La tangente $T_f(x_0)$ è la retta che taglia C in M_0 in due punti *infinitamente vicini*.



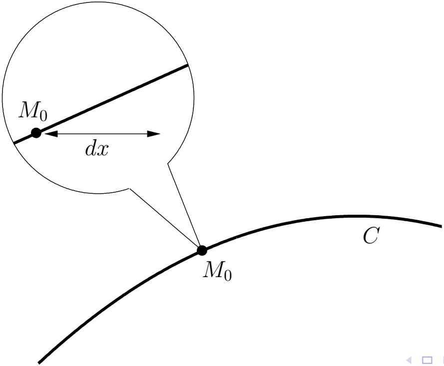
Intuizione statica

- La tangente non è definita da un processo (passaggio al limite), bensì da una *posizione*. La tangente $T_f(x_0)$ è la retta che taglia C in M_0 in due punti *infinitamente vicini*.



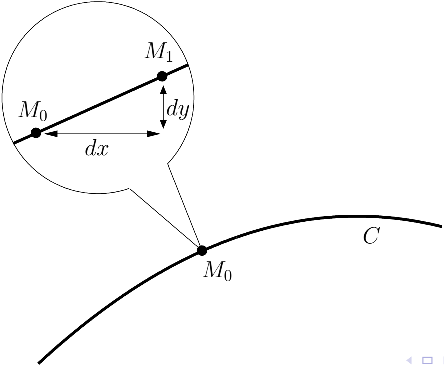
Intuizione statica

- La tangente non è definita da un processo (passaggio al limite), bensì da una *posizione*. La tangente $T_f(x_0)$ è la retta che taglia C in M_0 in due punti *infinitamente vicini*.



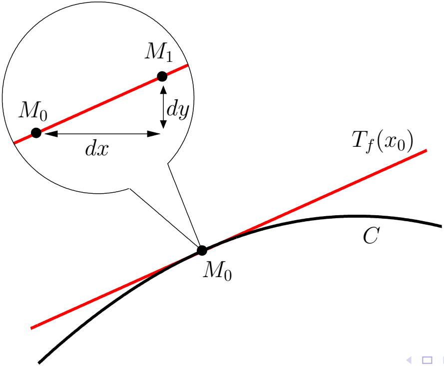
Intuizione statica

- La tangente non è definita da un processo (passaggio al limite), bensì da una *posizione*. La tangente $T_f(x_0)$ è la retta che taglia C in M_0 in due punti *infinitamente vicini*.

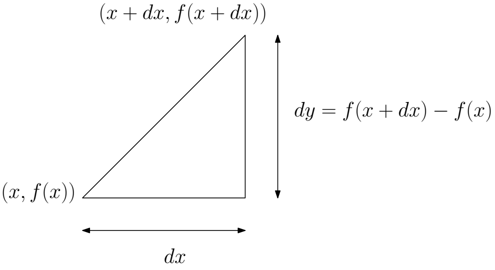


Intuizione statica

- La tangente non è definita da un processo (passaggio al limite), bensì da una *posizione*. La tangente $T_f(x_0)$ è la retta che taglia C in M_0 in due punti *infinitamente vicini*.

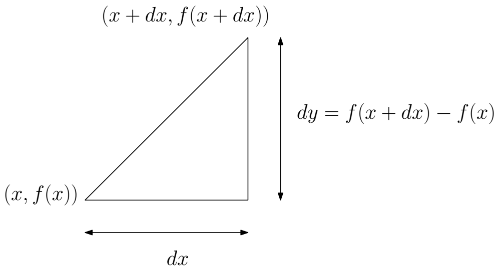


Per tradurre in scrittura l'intuizione statica occorre:



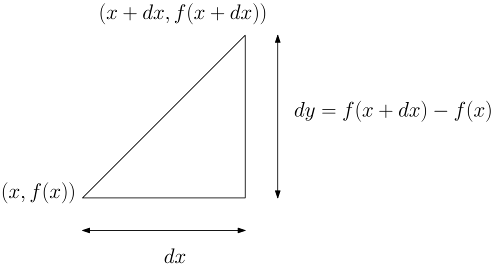
Per tradurre in scrittura l'intuizione statica occorre:

1. introdurre la nozione di incremento infinitesimale *dx* di *x*;



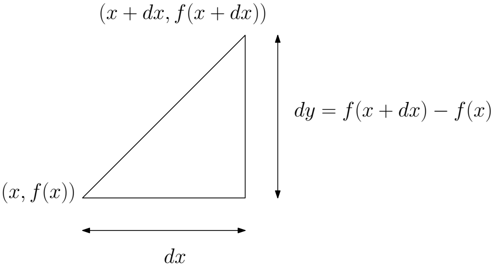
Per tradurre in scrittura l'intuizione statica occorre:

1. introdurre la nozione di incremento infinitesimale *dx* di *x*;
2. definire l'incremento infinitesimale *dy* di *y* corrispondente a *dx*;



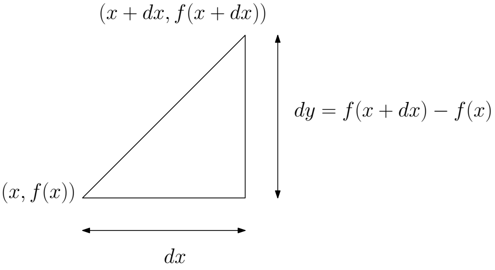
Per tradurre in scrittura l'intuizione statica occorre:

1. introdurre la nozione di incremento infinitesimale dx di x;
2. definire l'incremento infinitesimale dy di y corrispondente a dx;
3. ipotizzare che il rapporto dy/dx sia definito e costante per ogni dx;



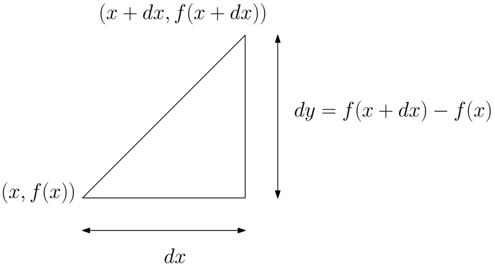
Per tradurre in scrittura l'intuizione statica occorre:

1. introdurre la nozione di incremento infinitesimale dx di x;
2. definire l'incremento infinitesimale dy di y corrispondente a dx;
3. ipotizzare che il rapporto dy/dx sia definito e costante per ogni dx;
4. definire la derivata $f'(x_0)$ di f in x_0 come uguale a questo rapporto costante.



Per tradurre in scrittura l'intuizione statica occorre:

1. introdurre la nozione di incremento infinitesimale dx di x;
2. definire l'incremento infinitesimale dy di y corrispondente a dx;
3. ipotizzare che il rapporto dy/dx sia definito e costante per ogni dx;
4. definire la derivata $f'(x_0)$ di f in x_0 come uguale a questo rapporto costante.



dx non deve essere nullo, altrimenti il rapporto dy/dx si ridurrebbe alla forma indeterminata $0/0$. dx deve tuttavia essere un numero, poiché in caso contrario non si potrebbe definire $f(x+dx)$, né dunque dy e dy/dx.

dx leibniziano

dx leibniziano

Aspetto semantico

mancanza di referenza, indice di referenti numerici impossibili

dx leibniziano

Aspetto semantico

mancanza di referenza, indice di referenti numerici impossibili

Aspetto sintattico

simbolo di costante

dx leibniziano

Aspetto semantico

mancanza di referenza, indice di referenti numerici impossibili

Aspetto sintattico

simbolo di costante

- Finzione letterale strutturata come un numero.

dx leibniziano

Aspetto semantico

mancanza di referenza, indice di referenti numerici impossibili

Aspetto sintattico

simbolo di costante

- Finzione letterale strutturata come un numero.
- Incremento o decremento momentaneo di quantità. . .

dx leibniziano

Aspetto semantico

mancanza di referenza, indice di referenti numerici impossibili

Aspetto sintattico

simbolo di costante

- Finzione letterale strutturata come un numero.
- Incremento o decremento momentaneo di quantità...
- ... minore di qualsiasi quantità data.

Leibniz

G.W. Leibniz
(1646–1716)

Leibniz

- Privilegio della struttura formale del linguaggio e sfruttamento delle risorse della scrittura

G.W. Leibniz
(1646–1716)

Leibniz

- Privilegio della struttura formale del linguaggio e sfruttamento delle risorse della scrittura
- Gli infinitesimi sono *finzioni ben fondate*: si può ragionare come se esistessero senza commettere errore

G.W. Leibniz
(1646–1716)

Leibniz

- Privilegio della struttura formale del linguaggio e sfruttamento delle risorse della scrittura
- Gli infinitesimi sono *finzioni ben fondate*: si può ragionare come se esistessero senza commettere errore
- Gli infinitesimi godono delle stesse *proprietà elementari* degli altri numeri

G.W. Leibniz
(1646–1716)

Esempio di ragionamento "infinitesimale"

Sia f la funzione definita da $f(x) = x^2$ e dx un infinitesimo.

Esempio di ragionamento "infinitesimale"

Sia f la funzione definita da $f(x) = x^2$ e dx un infinitesimo.

Allora

$$f(x + dx) = (x + dx)^2 = x^2 + 2xdx + dx^2$$

Esempio di ragionamento "infinitesimale"

Sia f la funzione definita da $f(x) = x^2$ e dx un infinitesimo.

Allora

$$f(x + dx) = (x + dx)^2 = x^2 + 2xdx + dx^2$$

e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \frac{x^2 + 2xdx + dx^2 - x^2}{dx} =$$

Esempio di ragionamento "infinitesimale"

Sia f la funzione definita da $f(x) = x^2$ e dx un infinitesimo.

Allora

$$f(x+dx) = (x+dx)^2 = x^2 + 2xdx + dx^2$$

e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \frac{x^2 + 2xdx + dx^2 - x^2}{dx} =$$

$$\frac{2xdx + dx^2}{dx} = 2x + dx$$

Esempio di ragionamento "infinitesimale"

Sia f la funzione definita da $f(x) = x^2$ e dx un infinitesimo.

Allora

$$f(x+dx) = (x+dx)^2 = x^2 + 2xdx + dx^2$$

e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \frac{x^2 + 2xdx + dx^2 - x^2}{dx} =$$

$$\frac{2xdx + dx^2}{dx} = 2x + dx = \boxed{2x}$$

dato che dx è infinitesimo!

Bishop Berkeley – The Analyst (1734)

George Berkeley (1685–1753)

Bishop Berkeley – The Analyst (1734)

- $2x + dx$ non può essere "lo stesso" che $2x$

George Berkeley (1685–1753)

Bishop Berkeley – The Analyst (1734)

- $2x + dx$ non può essere "lo stesso" che $2x$
- una volta ammesso che gli incrementi scompaiano, o che siano nulla, cade la precedente ipotesi che gli incrementi siano qualcosa, mentre viene mantenuta una conseguenza di tale ipotesi

George Berkeley (1685–1753)

Bishop Berkeley – The Analyst (1734)

- $2x + dx$ non può essere "lo stesso" che $2x$
- una volta ammesso che gli incrementi scompaiano, o che siano nulla, cade la precedente ipotesi che gli incrementi siano qualcosa, mentre viene mantenuta una conseguenza di tale ipotesi
- gli infinitesimi sono i *fantasmi di quantità defunte*

George Berkeley (1685–1753)

d'Alembert, Cauchy, Weierstrass (1754–1870)

Karl Weierstrass
(1815–1897)

d'Alembert, Cauchy, Weierstrass (1754–1870)

- La matematica deve trattare solo oggetti ideali *possibili*

Karl Weierstrass
(1815–1897)

d'Alembert, Cauchy, Weierstrass (1754–1870)

- La matematica deve trattare solo oggetti ideali *possibili*
- Introduzione del concetto di limite: una quantità è infinitesima se si avvicina indefinitamente a zero

Karl Weierstrass (1815–1897)

d'Alembert, Cauchy, Weierstrass (1754–1870)

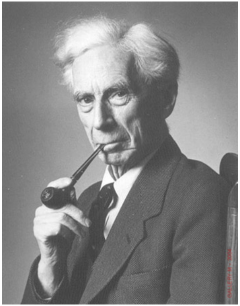
- La matematica deve trattare solo oggetti ideali *possibili*
- Introduzione del concetto di limite: una quantità è infinitesima se si avvicina indefinitamente a zero
- Introduzione della definizione ε, δ di limite

Karl Weierstrass (1815–1897)

d'Alembert, Cauchy, Weierstrass (1754–1870)

- La matematica deve trattare solo oggetti ideali *possibili*
- Introduzione del concetto di limite: una quantità è infinitesima se si avvicina indefinitamente a zero
- Introduzione della definizione ε, δ di limite
- Ritorno al rigore: il calcolo diventa semanticamente e sintatticamente consistente

Karl Weierstrass (1815–1897)



Bertrand Russell
(1872–1970)

Il pensiero agli inizi del '900

"Gli infinitesimi [. . .] devono essere considerati non necessari, erronei e auto-contraddittori."

Logica e teoria dei modelli

Sia $\mathscr{A} = \langle A, R_1, \ldots, R_p \rangle$ una struttura definita su un insieme di base A (universo del discorso) dalle relazioni (o funzioni) R_i. Per "parlare" di $\mathscr{A}$ si utilizza un linguaggio formale $L_{\mathscr{A}}$ contenente

Logica e teoria dei modelli

Sia $\mathscr{A} = \langle A, R_1, \ldots, R_p \rangle$ una struttura definita su un insieme di base A (universo del discorso) dalle relazioni (o funzioni) R_i. Per "parlare" di $\mathscr{A}$ si utilizza un linguaggio formale $L_{\mathscr{A}}$ contenente

1. un insieme numerabile di simboli di variabile $x, y, z, \ldots$;

Logica e teoria dei modelli

Sia $\mathscr{A} = \langle A, R_1, \ldots, R_p \rangle$ una struttura definita su un insieme di base A (universo del discorso) dalle relazioni (o funzioni) R_i. Per "parlare" di $\mathscr{A}$ si utilizza un linguaggio formale $L_{\mathscr{A}}$ contenente

1. un insieme numerabile di simboli di variabile $x, y, z, \ldots$;
2. un insieme numerabile di costanti $a, b, c, \ldots$;

Logica e teoria dei modelli

Sia $\mathscr{A} = \langle A, R_1, \ldots, R_p \rangle$ una struttura definita su un insieme di base A (universo del discorso) dalle relazioni (o funzioni) R_i. Per "parlare" di $\mathscr{A}$ si utilizza un linguaggio formale $L_{\mathscr{A}}$ contenente

1. un insieme numerabile di simboli di variabile $x, y, z, \ldots$;
2. un insieme numerabile di costanti $a, b, c, \ldots$;
3. il simbolo $=$ di uguaglianza;

Logica e teoria dei modelli

Sia $\mathscr{A} = \langle A, R_1, \ldots, R_p \rangle$ una struttura definita su un insieme di base A (universo del discorso) dalle relazioni (o funzioni) R_i. Per "parlare" di $\mathscr{A}$ si utilizza un linguaggio formale $L_{\mathscr{A}}$ contenente

1. un insieme numerabile di simboli di variabile $x, y, z, \ldots$;
2. un insieme numerabile di costanti $a, b, c, \ldots$;
3. il simbolo $=$ di uguaglianza;
4. un insieme di simboli di relazione $\underline{R}_1, \ldots, \underline{R}_p$ corrispondenti a $R_1, \ldots, R_p$;

Logica e teoria dei modelli

Sia $\mathscr{A} = \langle A, R_1, \ldots, R_p \rangle$ una struttura definita su un insieme di base A (universo del discorso) dalle relazioni (o funzioni) R_i. Per "parlare" di $\mathscr{A}$ si utilizza un linguaggio formale $L_{\mathscr{A}}$ contenente

1. un insieme numerabile di simboli di variabile $x, y, z, \ldots$;
2. un insieme numerabile di costanti $a, b, c, \ldots$;
3. il simbolo $=$ di uguaglianza;
4. un insieme di simboli di relazione $\underline{R}_1, \ldots, \underline{R}_p$ corrispondenti a $R_1, \ldots, R_p$;
5. connettivi proposizionali $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$;

Logica e teoria dei modelli

Sia $\mathscr{A} = \langle A, R_1, \ldots, R_p \rangle$ una struttura definita su un insieme di base A (universo del discorso) dalle relazioni (o funzioni) R_i. Per "parlare" di $\mathscr{A}$ si utilizza un linguaggio formale $L_{\mathscr{A}}$ contenente

1. un insieme numerabile di simboli di variabile $x, y, z, \ldots$;
2. un insieme numerabile di costanti $a, b, c, \ldots$;
3. il simbolo $=$ di uguaglianza;
4. un insieme di simboli di relazione $\underline{R}_1, \ldots, \underline{R}_p$ corrispondenti a $R_1, \ldots, R_p$;
5. connettivi proposizionali $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$;
6. quantificatori $\exists, \forall$.

Regola del Modus Ponens

Se φ *e* $\varphi \to \psi$ *sono teoremi, allora* ψ *è un teorema.*

Regola del Modus Ponens

Se φ e $\varphi \to \psi$ sono teoremi, allora ψ è un teorema.

Definizione

Un enunciato φ di $L_{\mathscr{A}}$ è valido in $\mathscr{A}$ se è vero una volta interpretato (in simboli $\mathscr{A} \models \varphi$).

Regola del Modus Ponens

Se φ e $\varphi \to \psi$ sono teoremi, allora ψ è un teorema.

Definizione

Un enunciato φ di $L_{\mathscr{A}}$ è valido in $\mathscr{A}$ se è vero una volta interpretato (in simboli $\mathscr{A} \models \varphi$).

Definizione

Se Σ è un insieme di enunciati e se $\mathscr{A} \models \varphi$ per ogni enunciato φ di Σ, si dice che $\mathscr{A}$ è un modello di Σ (in simboli $\mathscr{A} \models \Sigma$).

Regola del Modus Ponens

Se φ e $\varphi \to \psi$ sono teoremi, allora ψ è un teorema.

Definizione

Un enunciato φ di $L_{\mathscr{A}}$ è valido in $\mathscr{A}$ se è vero una volta interpretato (in simboli $\mathscr{A} \models \varphi$).

Definizione

Se Σ è un insieme di enunciati e se $\mathscr{A} \models \varphi$ per ogni enunciato φ di Σ, si dice che $\mathscr{A}$ è un modello di Σ (in simboli $\mathscr{A} \models \Sigma$).

Definizione

Sia Σ un insieme consistente di enunciati. Si chiama teoria di Σ, l'insieme degli enunciati derivabili da Σ (cioè la chiusura deduttiva di Σ).

Teorema di Löwenheim-Skolem-Tarski

Sia Σ una teoria di L. Se Σ ha un modello infinito, ha estensioni per ogni cardinale infinito $\beta \geq \|L\|$.

Teorema di Löwenheim-Skolem-Tarski

Sia Σ una teoria di L. Se Σ ha un modello infinito, ha estensioni per ogni cardinale infinito $\beta \geq \|L\|$.

Se partiamo dalla struttura reale $\mathscr{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$

Teorema di Löwenheim-Skolem-Tarski

Sia Σ una teoria di L. Se Σ ha un modello infinito, ha estensioni per ogni cardinale infinito $\beta \geq \|L\|$.

Se partiamo dalla struttura reale $\mathscr{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$

Corollario

Esistono modelli $\mathscr{R}^* = (\mathbb{R}^*, +^*, \cdot^*, \leq^*)$ (non isomorfi a $\mathscr{R}$) che sono estensioni elementari di $\mathscr{R}$ relativamente a $\mathbb{R}$, nelle quali è valida ogni proprietà elementare di $\mathscr{R}$ esprimibile nel linguaggio formale di base $L_{\mathscr{R}}$.

Infiniti e infinitesimi

Definizione

Un elemento $x \in \mathbb{R}^*$ *si dice*

Infiniti e infinitesimi

Definizione

Un elemento $x \in \mathbb{R}^*$ si dice

1. *infinitesimo se $|x| < r$ per ogni $r \in \mathbb{R}^+$;*

Infiniti e infinitesimi

Definizione

Un elemento $x \in \mathbb{R}^*$ *si dice*

1. *infinitesimo se* $|x| < r$ *per ogni* $r \in \mathbb{R}^+$*;*
2. *infinito se* $|x| > r$ *per ogni* $r \in \mathbb{R}^+$*;*

Infiniti e infinitesimi

Definizione

Un elemento $x \in \mathbb{R}^*$ *si dice*

1. *infinitesimo se* $|x| < r$ *per ogni* $r \in \mathbb{R}^+$;
2. *infinito se* $|x| > r$ *per ogni* $r \in \mathbb{R}^+$;
3. *finito se* $|x| < r$ *per qualche* $r \in \mathbb{R}^+$.

Teorema

$\mathbb{R}^*$ *contiene elementi infinitesimi.*

Teorema

$\mathbb{R}^*$ *contiene elementi infinitesimi.*

Dimostrazione.

Sia $\rho \in \mathbb{R}^* - \mathbb{R}$ finito. Siano $A = \{x \in \mathbb{R} : \rho < x\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x < \rho\}$. Esiste un numero reale s tale che $-s < \rho < s$. Segue che B è non vuoto e ha un maggiorante. Sia $r \in \mathbb{R}$ l'estremo superiore B (l'esistenza di r è assicurata dalla completezza di $\mathbb{R}$). Per ogni $\varepsilon > 0$ in $\mathbb{R}$, $r + \varepsilon \in A$ e $r - \varepsilon \in B$, così $r - \varepsilon < \rho < r + \varepsilon$ e dunque $|r - \rho| < \varepsilon$. Segue che $r - \rho$ è infinitesimo.

Se ρ non è finito, il suo inverso $1/\rho$ è infinitesimo. $\square$

Definizione

Due numeri $x, y \in \mathbb{R}^*$ si dicono infinitamente vicini se $x - y$ è infinitesimo. In tal caso scriviamo $x \approx y$. La monade di x è l'insieme

$$\mathrm{m}(x) = \{y \in \mathbb{R}^* : x \approx y\}.$$

Definizione

Due numeri $x, y \in \mathbb{R}^*$ si dicono infinitamente vicini se $x - y$ è infinitesimo. In tal caso scriviamo $x \approx y$. La monade di x è l'insieme

$$\mathrm{m}(x) = \{y \in \mathbb{R}^* : x \approx y\}.$$

Proprietà delle monadi

1. $\approx$ è una relazione d'equivalenza: $\mathrm{m}(x)$ è la classe di equivalenza di x;

Definizione

Due numeri $x, y \in \mathbb{R}^*$ si dicono infinitamente vicini se $x - y$ è infinitesimo. In tal caso scriviamo $x \approx y$. La monade di x è l'insieme

$$\mathrm{m}(x) = \{y \in \mathbb{R}^* : x \approx y\}.$$

Proprietà delle monadi

1. $\approx$ è una relazione d'equivalenza: $\mathrm{m}(x)$ è la classe di equivalenza di x;
2. ogni monade (di elementi finiti) contiene un unico numero reale;

Definizione

Due numeri $x, y \in \mathbb{R}^*$ si dicono infinitamente vicini se $x - y$ è infinitesimo. In tal caso scriviamo $x \approx y$. La monade di x è l'insieme

$$m(x) = \{y \in \mathbb{R}^* : x \approx y\}.$$

Proprietà delle monadi

1. $\approx$ è una relazione d'equivalenza: $m(x)$ è la classe di equivalenza di x;
2. ogni monade (di elementi finiti) contiene un unico numero reale;
3. se $x \in \mathbb{R}^*$ è finito, l'unico numero reale cui x è infinitamente vicino si chiama parte standard di x e si denota con $\mathrm{st}(x)$.

Assiomi per i numeri iperreali

Assiomi algebrici dei numeri reali

1. leggi della chiusura. 0 e 1 sono numeri reali. Se a e b sono numeri reali, allora lo sono pure $a+b$, ab e $-a$. Se a è un numero reale e $a \neq 0$, allora $1/a$ è un numero reale.
2. leggi commutative. $a+b=b+a$, $ab=ba$.
3. leggi associative. $a+(b+c)=(a+b)+c$, $a(bc)=(ab)c$.
4. leggi dell'identità. $0+a=a$, $1\cdot a=a$.
5. leggi dell'inverso. $a+(-a)=0$. Se $a\neq 0$, $a\cdot 1/a=1$.
6. legge distributiva. $a(b+c)=ab+ac$.

Assiomi per i numeri iperreali

Assiomi d'ordine dei numeri reali

1. $0 < 1$.
2. legge transitiva. Se $a \leq b$ e $b \leq c$, allora $a \leq c$.
3. legge di dicotomia. $a \leq b$ oppure $b \leq a$.
4. legge della somma. Se $a \leq b$, allora $a + c \leq b + c$.
5. legge del prodotto. Se $a \leq b$ e $0 \leq c$, allora $ac \leq bc$.
6. legge della radice. Per ogni numero reale $a \geq 0$ e per ogni intero positivo n, esiste un numero reale $b \geq 0$ tale che $b^n = a$.

Assiomi per i numeri iperreali

Assiomi d'ordine dei numeri reali

1. $0 < 1$.
2. legge transitiva. Se $a \leq b$ e $b \leq c$, allora $a \leq c$.
3. legge di dicotomia. $a \leq b$ oppure $b \leq a$.
4. legge della somma. Se $a \leq b$, allora $a + c \leq b + c$.
5. legge del prodotto. Se $a \leq b$ e $0 \leq c$, allora $ac \leq bc$.
6. legge della radice. Per ogni numero reale $a \geq 0$ e per ogni intero positivo n, esiste un numero reale $b \geq 0$ tale che $b^n = a$.

Assioma archimedeo

Per ogni numero reale $a > 0$, esiste un intero positivo n tale che $1/n < a$.

Assiomi per i numeri iperreali

Assiomi algebrici per i numeri iperreali

Ogni numero reale è un numero iperreale. Se a e b sono numeri iperreali, lo sono pure $a+b$, ab e $a-b$. Se a è un numero iperreale e $a \neq 0$, $1/a$ è un numero iperreale.
Le leggi commutative, associative, dell'identità, dell'inverso e distributiva valgono per tutti i numeri iperreali.

Assiomi per i numeri iperreali

Assiomi algebrici per i numeri iperreali

Ogni numero reale è un numero iperreale. Se a e b sono numeri iperreali, lo sono pure $a+b$, ab e $a-b$. Se a è un numero iperreale e $a \neq 0$, $1/a$ è un numero iperreale.
Le leggi commutative, associative, dell'identità, dell'inverso e distributiva valgono per tutti i numeri iperreali.

Assiomi d'ordine dei numeri iperreali

Le leggi transitiva, dicotomica, della somma e del prodotto valgono per tutti i numeri iperreali.
Per ogni numero iperreale $a \geq 0$ e per ogni intero positivo n, esiste un numero iperreale $b \geq 0$ tale che $b^n = a$.

Assiomi per i numeri iperreali

Assioma dell'infinitesimo

Esiste un numero iperreale infinitesimo positivo.

Assiomi per i numeri iperreali

Assioma dell'infinitesimo

Esiste un numero iperreale infinitesimo positivo.

Assioma della parte standard

Ogni numero iperreale finito è infinitamente vicino a esattamente un numero reale.

Assiomi per i numeri iperreali

Assioma dell'infinitesimo

Esiste un numero iperreale infinitesimo positivo.

Assioma della parte standard

Ogni numero iperreale finito è infinitamente vicino a esattamente un numero reale.

Assioma della funzione

Per ogni funzione reale f di una o più variabili, esiste una corrispondente funzione iperreale f^* dello stesso numero di variabili, detta *estensione naturale* di f. Le estensioni naturali delle funzioni somma, differenza, prodotto e reciproco sono le funzioni iperreali date nel primo assioma dei numeri iperreali.

Assiomi per i numeri iperreali

Assioma di soluzione

Se due sistemi di formule hanno esattamente le stesse soluzioni reali, allora hanno esattamente le stesse soluzioni iperreali. (Un sistema di formule è un insieme finito di equazioni e disuguaglianze).

Assiomi per i numeri iperreali

Assioma di soluzione

Se due sistemi di formule hanno esattamente le stesse soluzioni reali, allora hanno esattamente le stesse soluzioni iperreali. (Un sistema di formule è un insieme finito di equazioni e disuguaglianze).

Esempio 1

$$\sin(x+2\pi) = \sin(x),\ x = x \implies \sin^*(x+2\pi) = \sin^*(x),\ x = x$$

Assiomi per i numeri iperreali

Assioma di soluzione

Se due sistemi di formule hanno esattamente le stesse soluzioni reali, allora hanno esattamente le stesse soluzioni iperreali. (Un sistema di formule è un insieme finito di equazioni e disuguaglianze).

Esempio 1

$$\sin(x+2\pi)=\sin(x),\ x=x \quad\Longrightarrow\quad \sin^*(x+2\pi)=\sin^*(x),\ x=x$$

Esempio 2

$$\sqrt{x}=y,\quad \begin{cases} y^2=x \\ y\geq 0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{x}^{\,*}=y,\quad \begin{cases} y^2=x \\ y\geq^* 0 \end{cases}$$

Assiomi per i numeri iperreali

L'assioma di soluzione è equivalente al seguente

Assiomi per i numeri iperreali

L'assioma di soluzione è equivalente al seguente

Principio di trasferimento

Se Φ è una formula in $L_{\mathscr{R}}$ che è vera in $\mathscr{R}$, allora Φ^*, ottenuta sostituendo ad ogni funzione di Φ la sua estensione naturale, è vera in $\mathscr{R}^*$.

Analisi non standard - un risultato negativo

Se indichiamo con $\mathfrak{S}$ il sistema formale che codifica l'analisi standard e con $\mathfrak{NS}$ quello che codifica l'analisi non-standard (esteso), si ha il seguente teorema di limitazione dovuto a Kreisel:

Analisi non standard - un risultato negativo

Se indichiamo con $\mathfrak{S}$ il sistema formale che codifica l'analisi standard e con $\mathfrak{NS}$ quello che codifica l'analisi non-standard (esteso), si ha il seguente teorema di limitazione dovuto a Kreisel:

Teorema

L'estensione $\mathfrak{NS}$ di $\mathfrak{S}$ è inessenziale: ogni formula di $\mathfrak{S}$ derivabile da $\mathfrak{NS}$ è derivabile da $\mathfrak{S}$.

Definizione

Sia f una funzione definita in un punto $x \in \mathbb{R}$. La derivata di f in x è definita da

$$f'(x) = \mathrm{st}\left(\frac{f^*(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

per ogni infinitesimo $\Delta x \neq 0$.

Definizione

Sia f una funzione definita in un punto $x \in \mathbb{R}$. La derivata di f in x è definita da

$$f'(x) = \mathrm{st}\left(\frac{f^*(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

per ogni infinitesimo $\Delta x \neq 0$.

Chiamiamo dy il *differenziale* di y, e la sua dipendenza da x e $dx = \Delta x$ è data da

$$dy = f'(x)dx.$$

Esempio

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ e Δx un infinitesimo non nullo.

Esempio

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ e Δx un infinitesimo non nullo.

Allora

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$$

Esempio

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ e Δx un infinitesimo non nullo.

Allora

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$$

e

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} =$$

Esempio

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ e Δx un infinitesimo non nullo.

Allora

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$$

e

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Esempio

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ e Δx un infinitesimo non nullo.

Allora

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$$

e

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \mathrm{st}(2x + \Delta x)$$

Esempio

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ e Δx un infinitesimo non nullo.

Allora

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$$

e

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

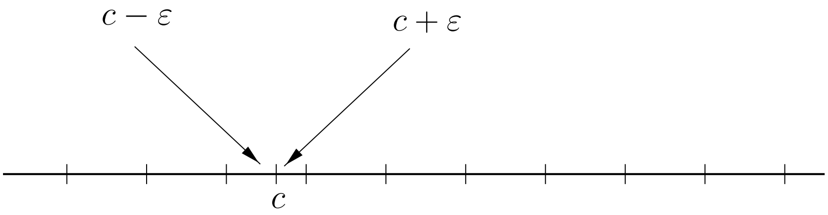
$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \mathrm{st}(2x + \Delta x) = \boxed{2x}$$

Microscopi infinitesimali

Il campo iperreale è non archimedeo, dunque non rappresentabile sulla retta, riservata a $\mathbb{R}$. Sulla retta reale non possiamo distinguere numeri che differiscono di un infinitesimo ε

Microscopi infinitesimali

Il campo iperreale è non archimedeo, dunque non rappresentabile sulla retta, riservata a $\mathbb{R}$. Sulla retta reale non possiamo distinguere numeri che differiscono di un infinitesimo ε

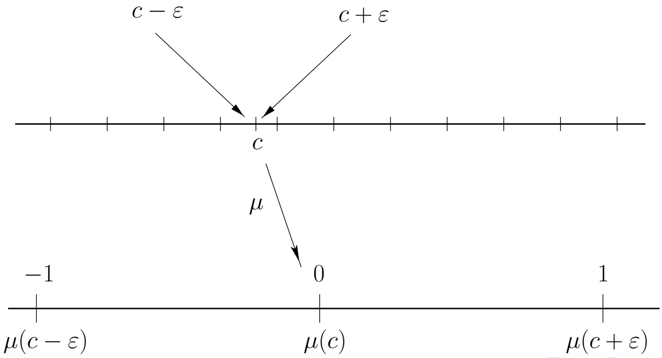


Per visualizzare la differenza fra c e $c + \varepsilon$ introduciamo la trasformazione $\mu : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ definita da

$$\mu(x) = \frac{x - c}{\varepsilon}$$

Per visualizzare la differenza fra c e $c+\varepsilon$ introduciamo la trasformazione $\mu : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ definita da

$$\mu(x) = \frac{x-c}{\varepsilon}$$



Microscopio in due dimensioni

Sia δ un infinitesimo. La funzione

$$\mu : \mathbb{R}^{*2} \to \mathbb{R}^{*2}, \quad \mu(x, y) = \left(\frac{x - \alpha}{\delta}, \frac{y - \beta}{\delta} \right)$$

è chiamata *δ-lente* puntata in (α, β). Il *campo di vista* di μ è l'insieme degli $(x, y) \in \mathbb{R}^{*2}$ tale che $\mu(x, y)$ è finito.
Procedendo considerando le parti standard di μ, otteniamo una funzione dal campo di vista in $\mathbb{R}^2$, chiamata *δ-lente ottica* puntata in (α, β) (o *microscopio ottico*).

Definizione

Dati due infinitesimi ε e δ, diciamo che ε ha, rispetto a δ, ordine superiore, lo stesso ordine o ordine inferiore, se il rapporto ε/δ è, rispettivamente, infinitesimo, finito ma non infinitesimo, infinito (se ε è di ordine superiore rispetto a δ, ε è un infinitesimo "più piccolo" di δ).

Definizione

Dati due infinitesimi ε e δ, diciamo che ε ha, rispetto a δ, ordine superiore, lo stesso ordine o ordine inferiore, se il rapporto ε/δ è, rispettivamente, infinitesimo, finito ma non infinitesimo, infinito (se ε è di ordine superiore rispetto a δ, ε è un infinitesimo "più piccolo" di δ).

Due punti nel campo di vista che differiscono per un infinitesimo di ordine superiore rispetto a δ appaiono uguali attraverso la δ-lente.

Esempio

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ e puntiamo una δ-lente in (a, a^2)

Esempio

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ e puntiamo una δ-lente in (a, a^2)

$$\mu(x, y) = \left(\frac{x - a}{\delta}, \frac{y - a^2}{\delta} \right)$$

Esempio

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ e puntiamo una δ-lente in (a, a^2)

$$\mu(x, y) = \left(\frac{x - a}{\delta}, \frac{y - a^2}{\delta} \right)$$

Un punto infinitamente vicino $(a + \lambda, (a + \lambda)^2)$, quando viene visto attraverso μ, diventa

Esempio

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ e puntiamo una δ-lente in (a, a^2)

$$\mu(x, y) = \left(\frac{x - a}{\delta}, \frac{y - a^2}{\delta} \right)$$

Un punto infinitamente vicino $(a + \lambda, (a + \lambda)^2)$, quando viene visto attraverso μ, diventa

$$\mu(a + \lambda, (a + \lambda)^2) = \left(\frac{\lambda}{\delta}, \frac{2a\lambda + \lambda^2}{\delta} \right)$$

Supponiamo che λ/δ sia finito. Dunque λ^2/δ è infinitesimo. Prendendo le parti standard, otteniamo

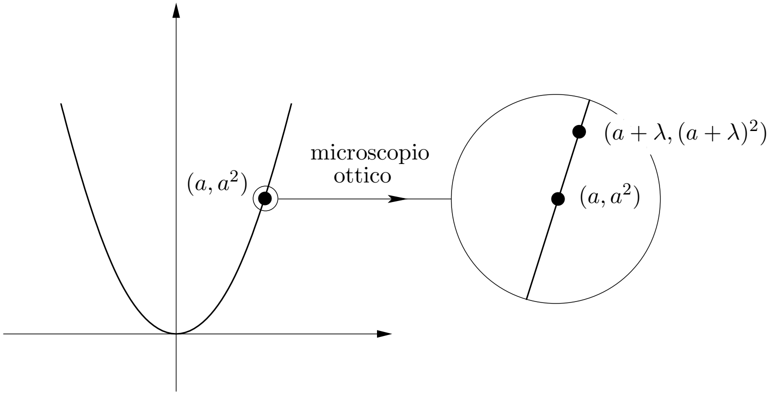
Supponiamo che λ/δ sia finito. Dunque λ^2/δ è infinitesimo. Prendendo le parti standard, otteniamo

$$\left(\operatorname{st}\left(\frac{\lambda}{\delta}\right), \operatorname{st}\left(\frac{2a\lambda}{\delta}+\frac{\lambda^2}{\delta}\right)\right) = \left(\operatorname{st}\left(\frac{\lambda}{\delta}\right), 2a\operatorname{st}\left(\frac{\lambda}{\delta}\right)\right)$$

Supponiamo che λ/δ sia finito. Dunque λ^2/δ è infinitesimo. Prendendo le parti standard, otteniamo

$$\left(\mathrm{st}\left(\frac{\lambda}{\delta}\right), \mathrm{st}\left(\frac{2a\lambda}{\delta} + \frac{\lambda^2}{\delta}\right)\right) = \left(\mathrm{st}\left(\frac{\lambda}{\delta}\right), 2a\,\mathrm{st}\left(\frac{\lambda}{\delta}\right)\right)$$

Se a è fisso, ponendo $\mathrm{st}(\lambda/\delta) = t$, vediamo che i punti del grafico nel campo di vista sono trasformati nella linea retta $(t, 2at)$, dove t varia.


(a, a^2)
microscopio
ottico
$(a+\lambda, (a+\lambda)^2)$
(a, a^2)

L'umiltà di una mente geniale...

Tratto da Non-standard Analysis:

> *"Il fatto che questo libro contenga solo applicazioni alla matematica classica è probabilmente una testimonianza delle limitazioni dell'autore e non del metodo"*

Abraham Robinson
(1918–1974)