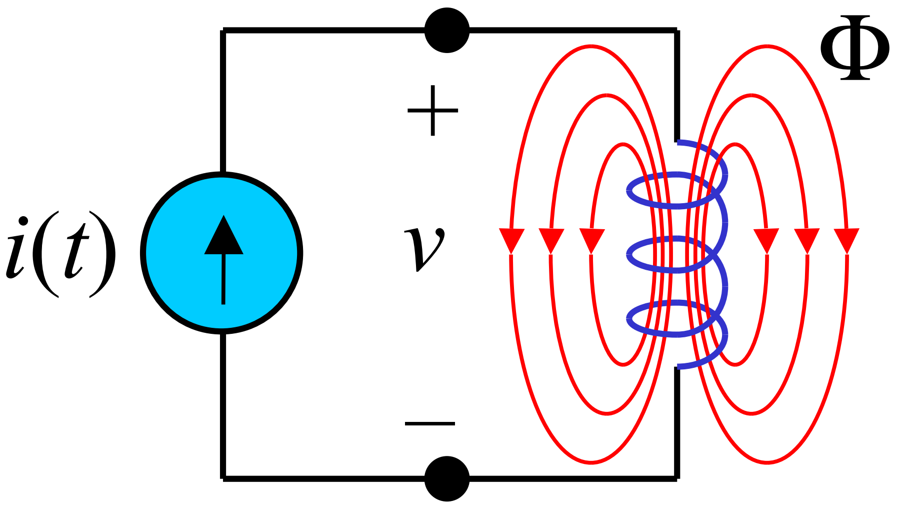
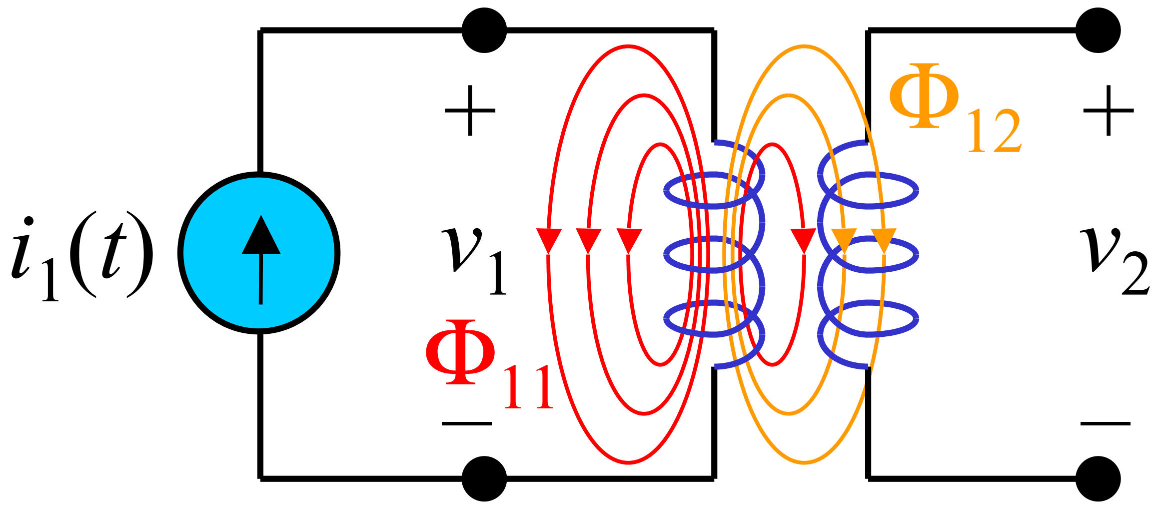
Autoinduttanza



$$v = N\frac{d\Phi}{dt} = N\frac{d\Phi}{di}\frac{di}{dt} = L\cdot\frac{di}{dt}$$

$L = N\,d\Phi/di$ è detta autoinduttanza (lega fra loro tensioni e correnti sulla stessa bobina)

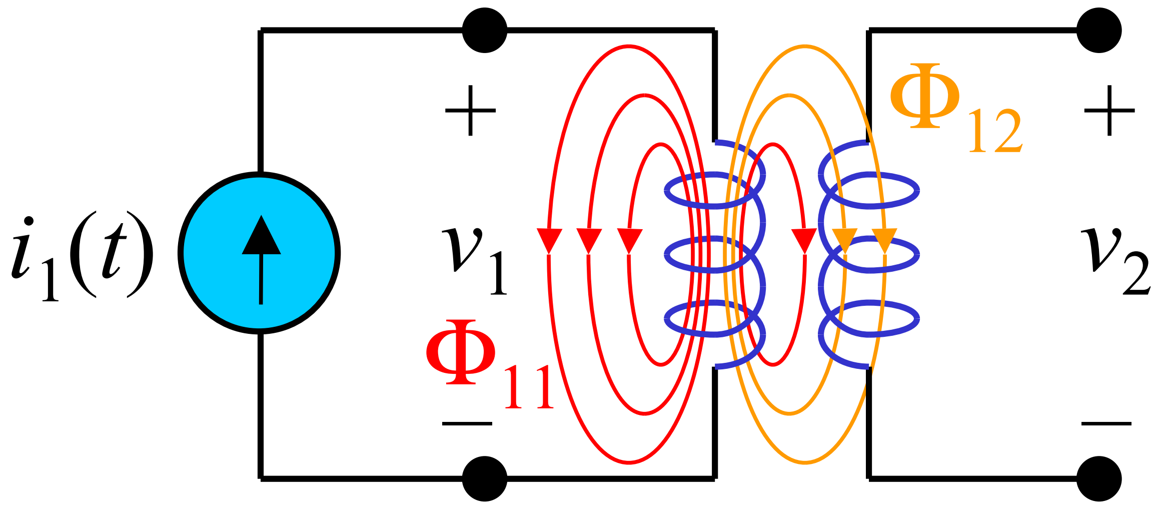
Mutua induttanza



$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}$$

$$v_1 = N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_1}{di_1} \frac{di_1}{dt} = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt}$$

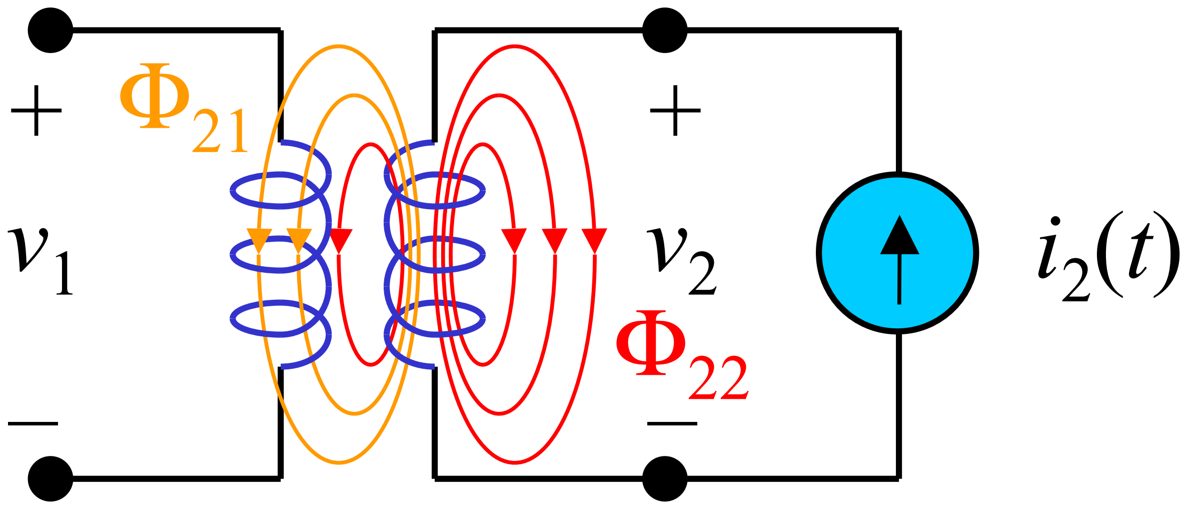
Mutua induttanza



$$v_2 = \pm N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = \pm N_2 \frac{d\Phi_{12}}{di_1}\frac{di_1}{dt} = \pm M_{21} \cdot \frac{di_1}{dt}$$

$M_{21} = N_2\, d\Phi_{12}/di_1$ è detta mutua induttanza (lega la tensione indotta sulla seconda bobina alla corrente nella prima bobina)

Mutua induttanza



$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21}$$

$$v_2 = N_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_2}{di_2} \frac{di_2}{dt} = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt}$$

$$v_1 = \pm N_1 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = \pm N_1 \frac{d\Phi_{21}}{di_2} \frac{di_2}{dt} = \pm M_{12} \cdot \frac{di_2}{dt}$$

Mutua induttanza

Si mostrerà che $M_{12} = M_{21} = M$

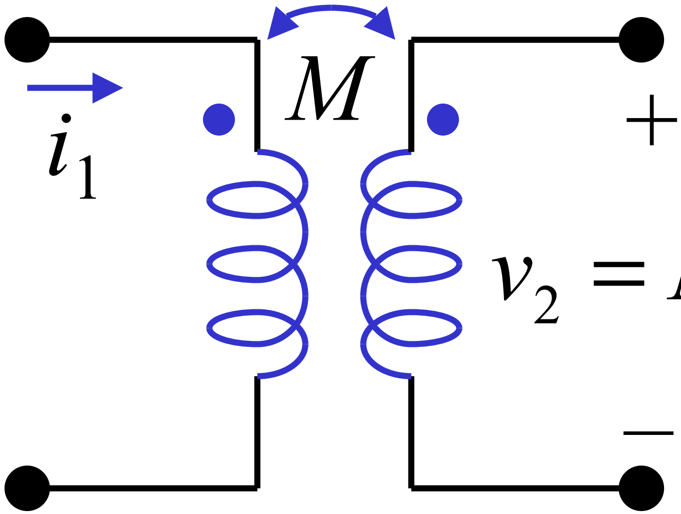
Nonostante la mutua induttanza sia sempre positiva ($M > 0$), la tensione indotta Mdi/dt può risultare positiva o negativa. Il segno dipende dal senso di avvolgimento dei fili delle due bobine.

Normalmente non è necessario "ispezionare" gli avvolgimenti poiché i terminali vengono "marcati" in modo che valga la convenzione dei puntini

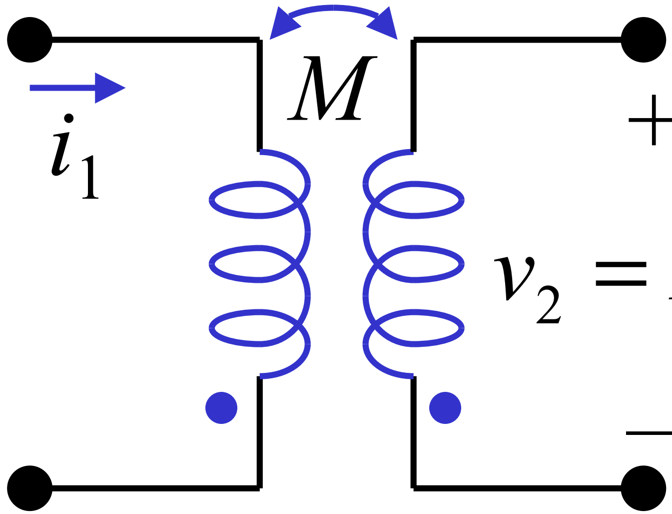
Convenzione dei puntini

Se la corrente entra dal terminale con il puntino di una bobina, la direzione di riferimento della tensione mutuamente indotta nella seconda bobina ha il segno positivo nel terminale col puntino della seconda bobina

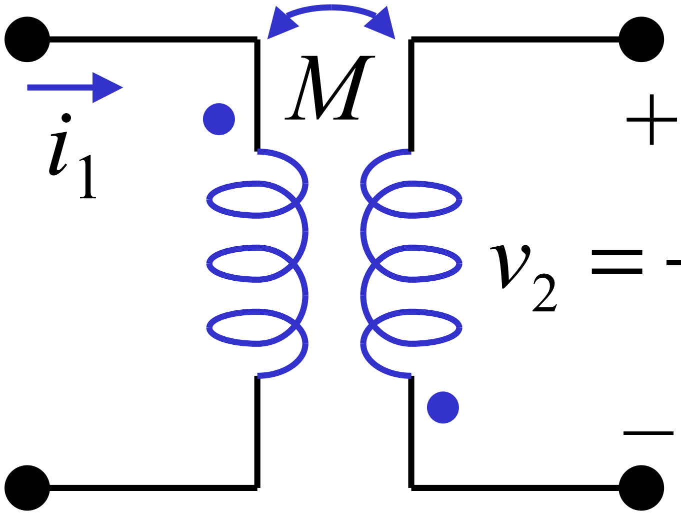
Convenzione dei puntini



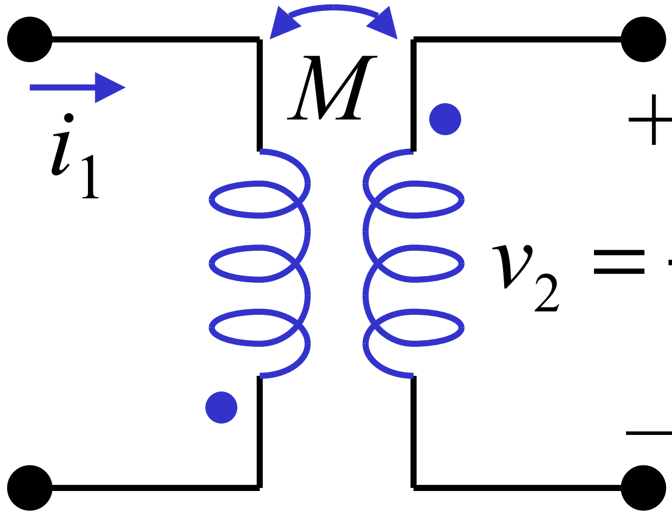
$$v_2 = M\frac{di_1}{dt}$$



$$v_2 = M\frac{di_1}{dt}$$

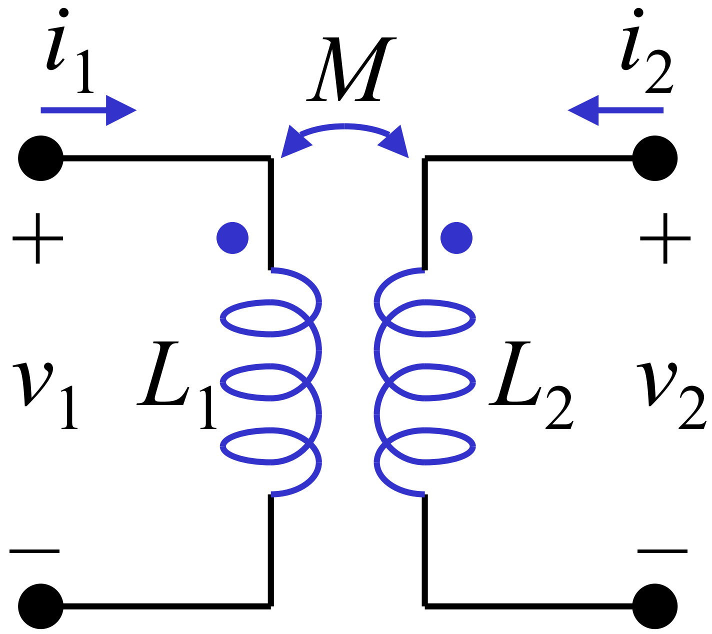


$$v_2 = -M\frac{di_1}{dt}$$



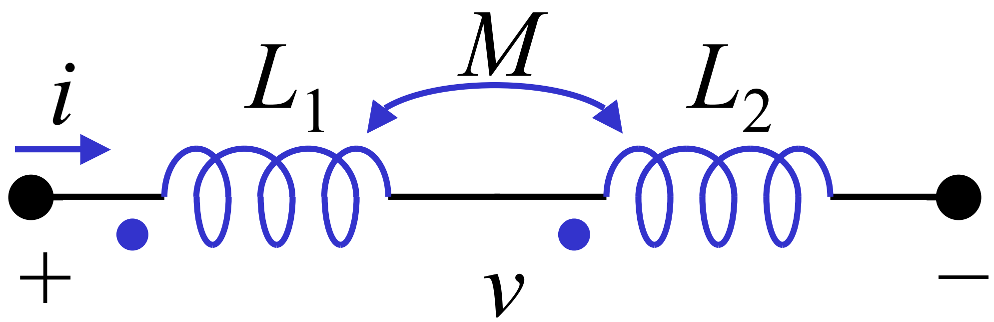
$$v_2 = -M\frac{di_1}{dt}$$

Convenzione dei puntini



$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \qquad v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

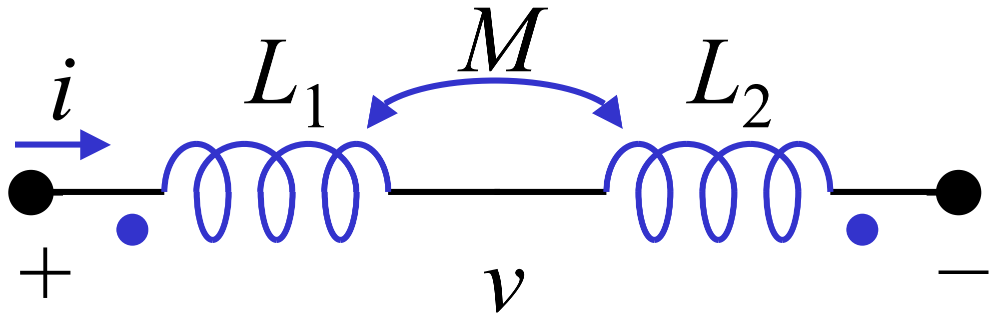
Collegamento serie concorde



$$v = L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}$$

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$$

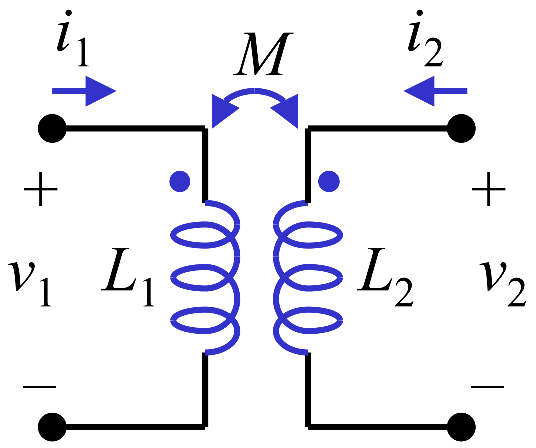
Collegamento serie in opposizione



$$v = L_1 \frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} = (L_1 + L_2 - 2M)\frac{di}{dt}$$

$$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M$$

Energia in un circuito con accoppiamento



Ricordiamo che si ha:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} \qquad\qquad v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

Supponiamo $i_1(0) = i_2(0) = 0$ e $w_1(0) = w_2(0) = 0$.

In un tempo t_1 si fa crescere i_1 fino a $i_1(t_1) = I_1$, con $i_2 = 0$ ($di_2/dt = 0$). Si ha quindi:

$$w(t_1) = \int_0^{t_1} (v_1 i_1 + v_2 i_2) dt = L_1 \int_0^{I_1} i_1 di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

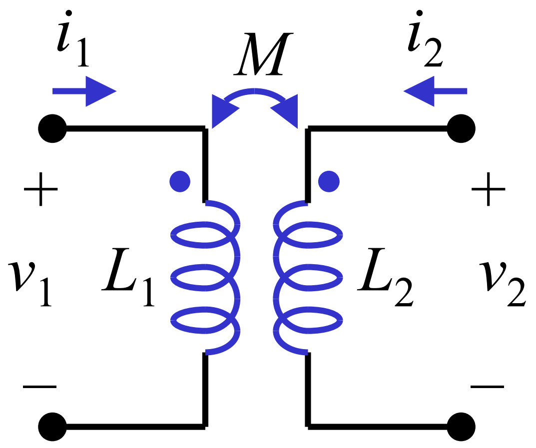
Dall'istante t_1 all'istante t_2 facciamo crescere i_2 fino a $i_2(t_2) = I_2$,con $i_1 = I_1$ ($di_1/dt = 0$). Si ha quindi:

$$w(t_2) = w(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} (v_1 i_1 + v_2 i_2) dt$$

$$= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{12} \int_0^{I_2} I_1 di_2 + L_2 \int_0^{I_2} i_2 di_2 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

Energia in un circuito con accoppiamento

Ricordiamo che si ha:



$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} \qquad v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

Supponiamo ancora $i_1(0) = i_2(0) = 0$ e $w_1(0) = w_2(0) = 0$.

Al contrario di prima, nel tempo t_1 si fa crescere i_2 fino a $i_2(t_1) = I_2$, con $i_1 = 0$ ($di_1/dt = 0$). Si ha quindi:

$$w'(t_1) = \int_0^{t_1} (v_1 i_1 + v_2 i_2) dt = L_2 \int_0^{I_2} i_2 di_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

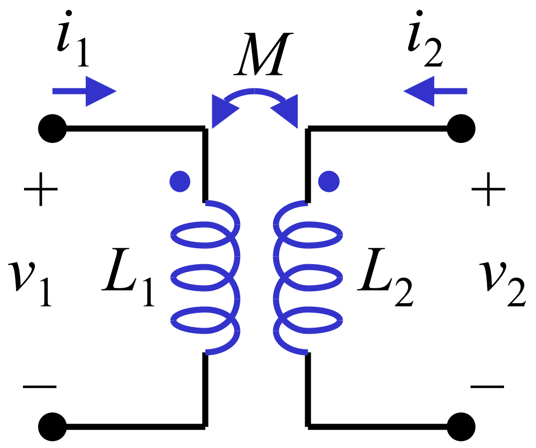
Dall'istante t_1 all'istante t_2 facciamo crescere i_1 fino a $i_1(t_2) = I_1$,con $i_2 = I_2$ ($di_2/dt = 0$). Si ha quindi:

$$w'(t_2) = w'(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} (v_1 i_1 + v_2 i_2) dt$$

$$= \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + L_1 \int_0^{I_1} i_1 di_1 + M_{21} \int_0^{I_1} I_2 di_1 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{21} I_1 I_2$$

Energia in un circuito con accoppiamento

Riassumendo si ha:



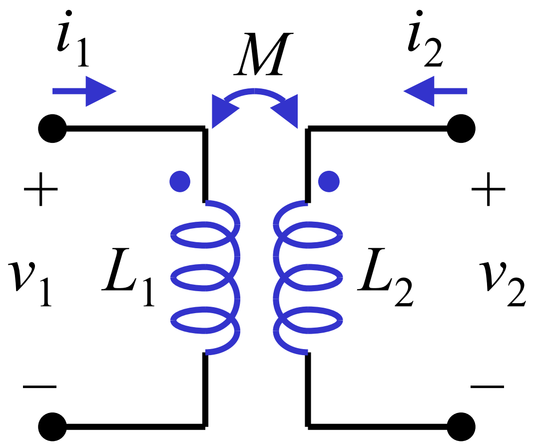
$$w(t_2) = \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{12} I_1 I_2$$

$$w'(t_2) = \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{21} I_1 I_2$$

ma in entrambi i casi siamo partiti dalla stessa condizione iniziale e arrivati alla stessa condizione finale. Pertanto deve essere:

$$w(t_2) = w'(t_2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{gathered} M_{21} = M_{12} \\ w = \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 \end{gathered}}$$

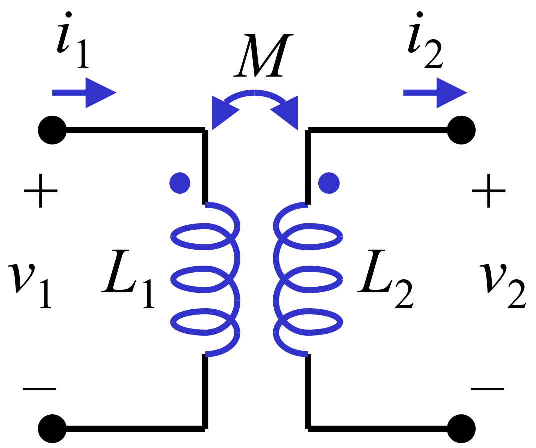
Energia in un circuito con accoppiamento



Poiché I_1 e I_2 sono quantità arbitrarie, si può scrivere:

$$w(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t)$$

Se le correnti non entrano o escono entrambe dal terminale con il puntino si ha:



$$w(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) - M i_1(t) i_2(t)$$

Energia in un circuito con accoppiamento

Poiché il circuito è passivo, l'energia immagazzinata non può essere negativa. Deve quindi essere verificata la relazione

$$w = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 - M i_1 i_2 \geq 0$$

Sommando e sottraendo $i_1 i_2 \sqrt{L_1 L_2}$ si ha:

$$\frac{1}{2}\left(i_1\sqrt{L_1} - i_2\sqrt{L_2}\right)^2 + i_1 i_2 \left(\sqrt{L_1 L_2} - M\right) \geq 0$$

e quindi deve essere

$$\sqrt{L_1 L_2} - M \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M \leq \sqrt{L_1 L_2}}$$

Coefficiente di accoppiamento

Si definisce coefficiente di accoppiamento la quantità

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

Il coefficiente di accoppiamento misura l'accoppiamento magnetico fra le due bobine ($0 \le k \le 1$)

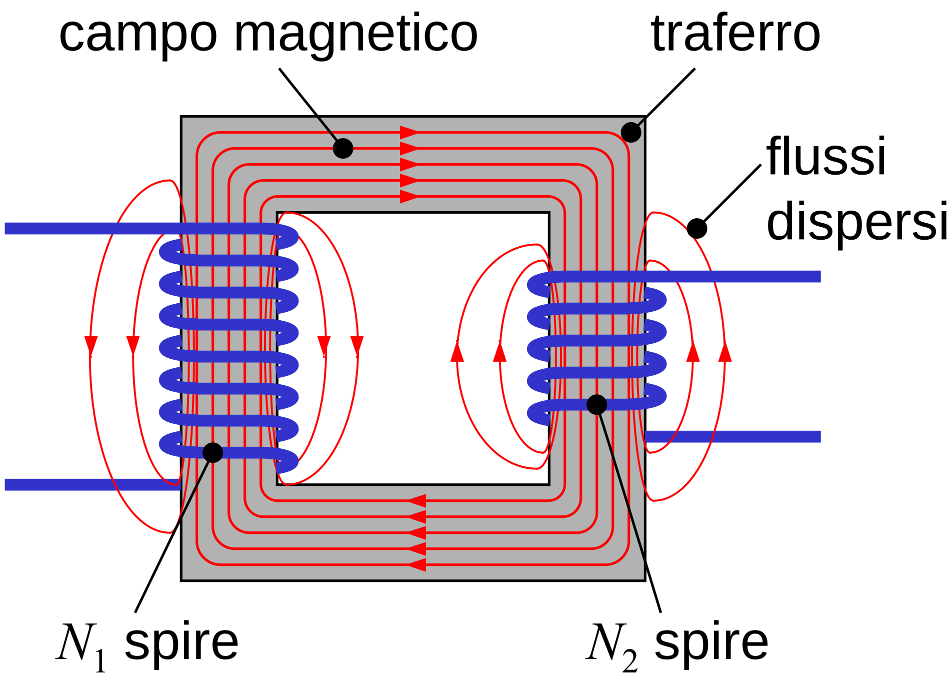
$$k = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{11} + \Phi_{12}} \qquad k = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_2} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{21} + \Phi_{22}}$$

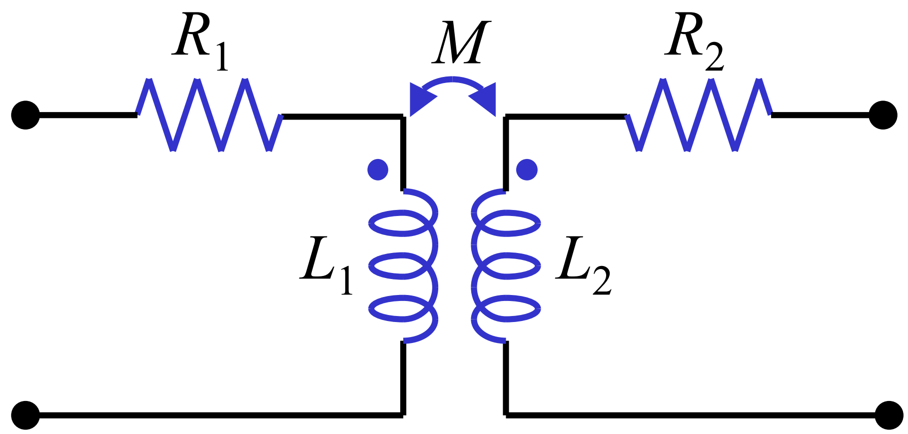
Se $k = 1$ si parla di accoppiamento perfetto

Se $k > 0.5$ si parla di accoppiamento stretto

Se $k < 0.5$ si parla di basso accoppiamento

Trasformatori lineari

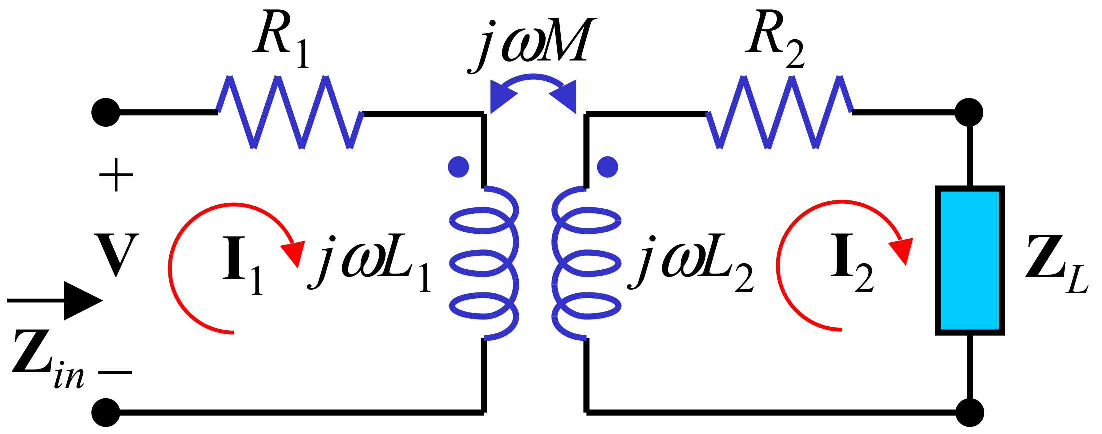




$k < 1$ a causa dei flussi dispersi

Un trasformatore è un quadrupolo costituito da due bobine magneticamente accoppiate. Se le proprietà magnetiche del traferro su cui sono avvolti i fili sono lineari, il trasformatore si dice lineare.

Impedenza riflessa



$$\begin{cases} \mathbf{V} = (R_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 \\ 0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + \mathbf{Z}_L)\mathbf{I}_2 \end{cases}$$

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}_1} = R_1 + j\omega L_1 + \boxed{\frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + \mathbf{Z}_L}}$$

Impedenza del primario

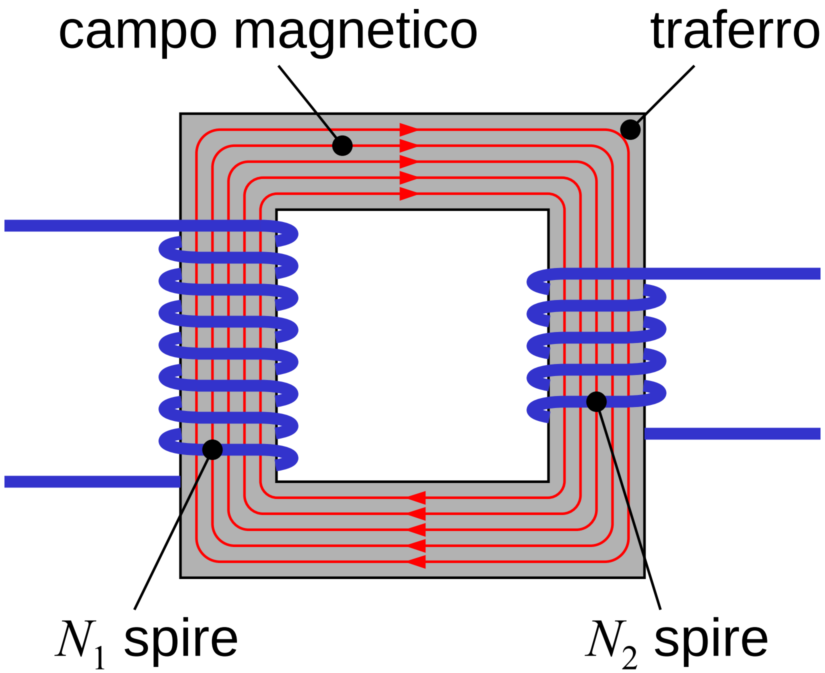
Impedenza riflessa

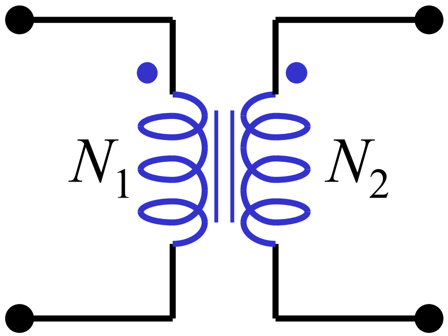
L'impedenza riflessa è il carico che viene visto in serie all'impedenza del primario a causa del mutuo accoppiamento

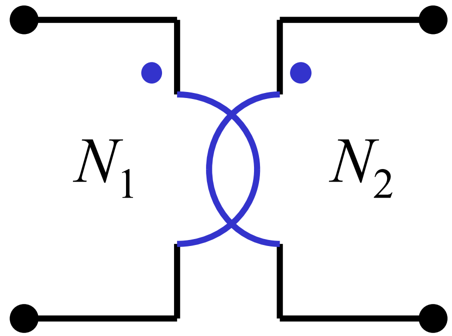
Trasformatori ideali

Un trasformatore è ideale se:

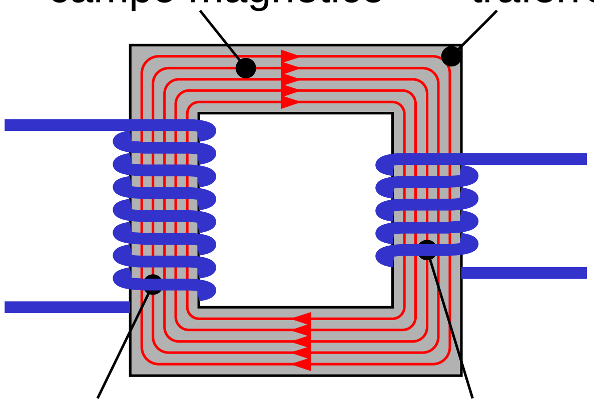
- non ha flussi dispersi $\Rightarrow k = 1$
- le auto e mutue induttanze sono molto elevate ($L_1, L_2, M \to \infty$)
- non vi sono perdite ($R_1 = R_2 = 0$)

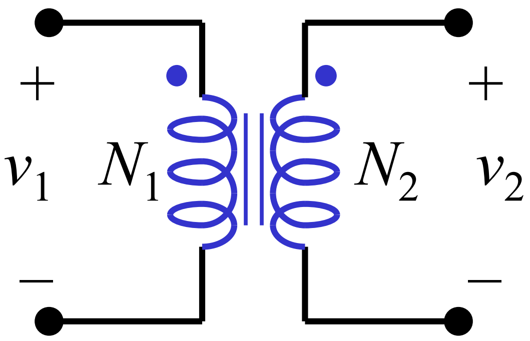






Trasformatori ideali





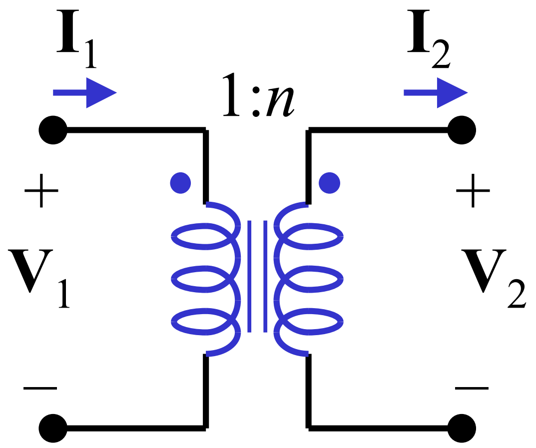
$$v_1 = N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} \qquad v_2 = N_2 \frac{d\Phi_2}{dt}$$

Poiché $k = 1$ si ha $\Phi_1 = \Phi_2$ e quindi

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_2}{N_1} = n$$

n è detto rapporto di trasformazione

Trasformatori ideali



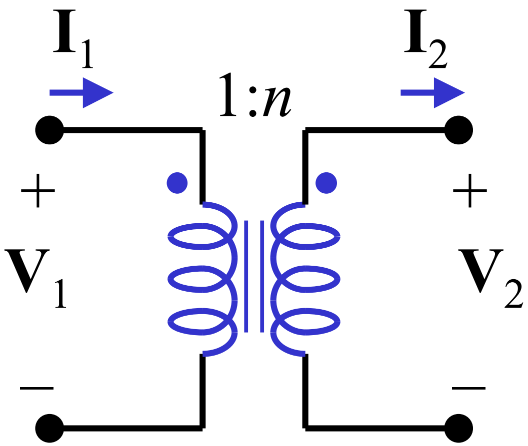
Passando ai fasori si ha:

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{N_2}{N_1} = n$$

Per l'ipotesi di assenza di perdite tutta la potenza entrante sul primario deve essere erogata al carico collegato al secondario:

$$v_1 i_1 = v_2 i_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{i_2}{i_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{n}$$

Trasformatori ideali



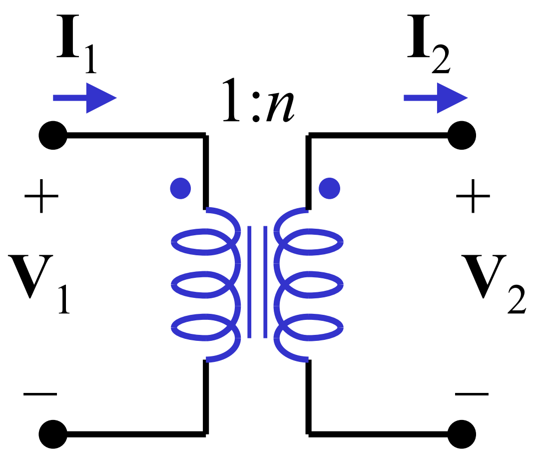
$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{N_2}{N_1} = n \qquad \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{n}$$

(si noti che $\mathbf{I}_2$ è uscente)

Se $V_2 > V_1$ ($n > 1$) si parla di trasformatore elevatore

Se $V_2 < V_1$ ($n < 1$) si parla di trasformatore riduttore

Trasformatori ideali



$$\mathbf{V}_2 = n\mathbf{V}_1 \qquad \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{I}_1}{n}$$

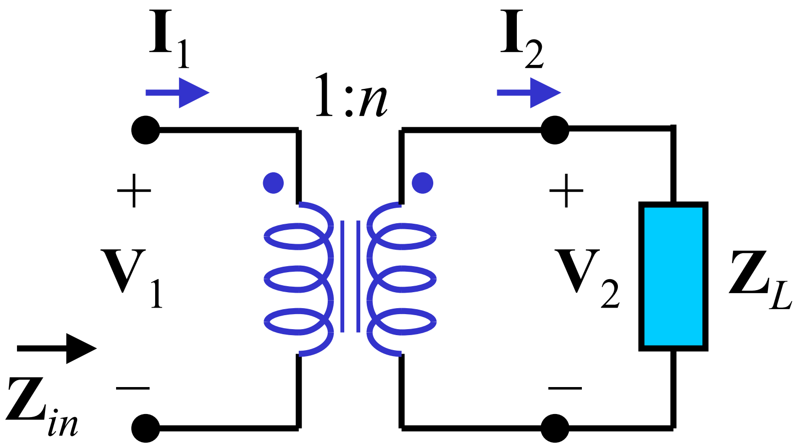
$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{V}_2}{n} \qquad \mathbf{I}_1 = n\mathbf{I}_2$$

Per la potenza complessa si ha:

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{V}_1\mathbf{I}_1^* = \frac{\mathbf{V}_2}{n}(n\mathbf{I}_2)^* = \mathbf{V}_2\mathbf{I}_2^* = \mathbf{S}_2$$

e quindi tutta la potenza complessa fornita al primario viene trasferita al secondario

Trasformatori ideali



$$\mathbf{V}_2 = n\mathbf{V}_1 \qquad \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{I}_1}{n}$$

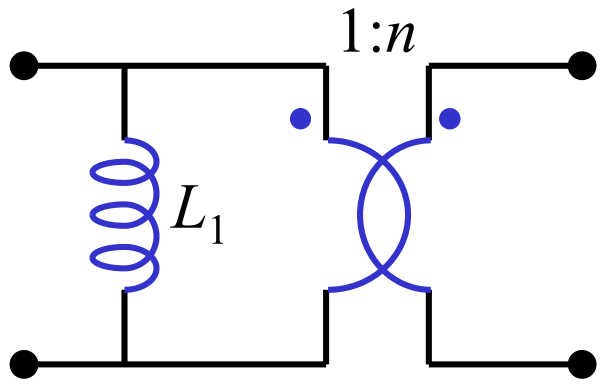
$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{V}_2}{n} \qquad \mathbf{I}_1 = n\mathbf{I}_2$$

L'impedenza vista ai capi dell'avvolgimento primario è:

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{\mathbf{V}_2 / n}{n\mathbf{I}_2} = \frac{\mathbf{V}_2}{n^2\mathbf{I}_2} = \frac{\mathbf{Z}_L}{n^2}$$

Trasformatore reale

Un modello approssimato del trasformatore reale (ancora nell'ipotesi di assenza di perdite) è il seguente



Dove L_1 rappresenta l'induttanza del primario