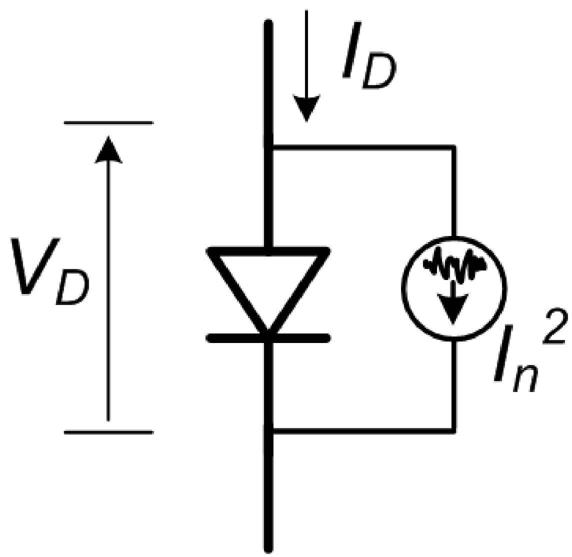
Rumore Elettronico

- *Sorgenti di rumore in Diodi, BJTs, MOSFETs*
- *Rumore equivalente all’ingresso di amplificatori*
- *Rumore nel dominio del tempo*

Rumore della Giunzione PN: “Shot Noise”

La corrente che fluisce attraverso una giunzione PN può essere immaginata come la somma di diversi impulsi dovuti ai singoli portatori di carica elettrica (q) che attraversano la barriera di potenziale. Gli impulsi hanno una spaziatura temporale casuale, portando a fluttuazioni sulla corrente totale: *Shot Noise*



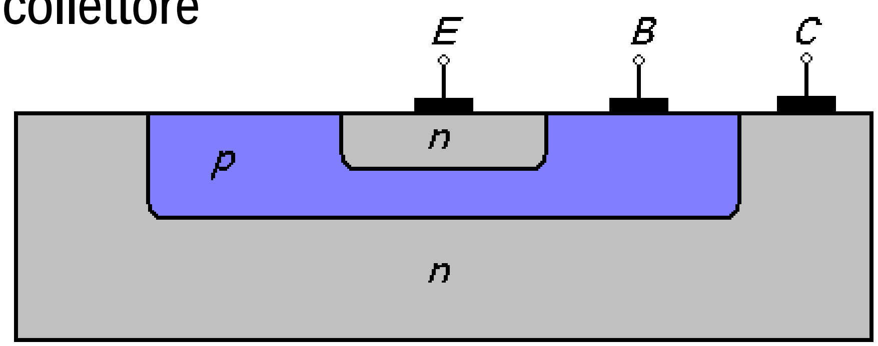
Il rumore sulla corrente dei diodi è bianco e può essere rappresentato da un generatore di corrente, in parallelo al diodo, con densità spettrale di potenza:

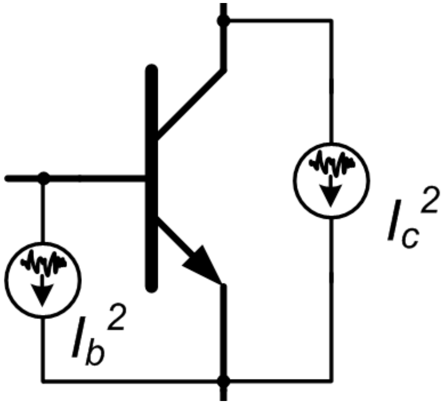
$$\boldsymbol{i_n^2 = 2qI_D \quad \left[A^2/Hz \right]}$$

q: carica unitaria (1.602×10^{-19} coulomb)
I_D: corrente media che fluisce attraverso la giunzione

Rumore Shot del transitor BJT

In regione attiva diretta la giunzione Base-Emettitore (BE) è polarizzata in diretta. Questa giunzione introduce rumore "Shot" sulla corrente di base e sulla corrente di collettore





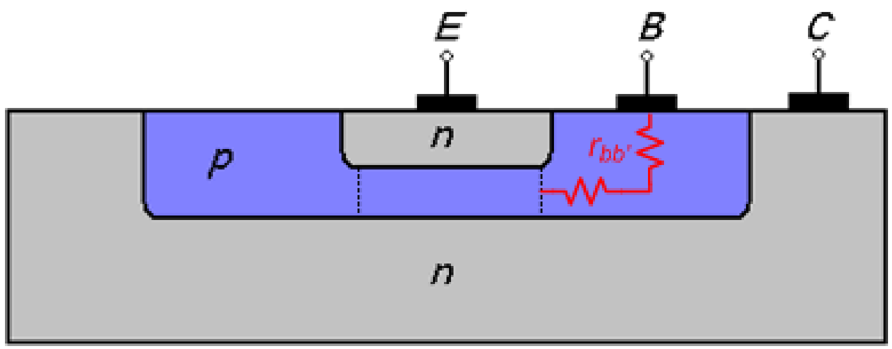
I due generatori di corrente di rumore sono bianchi, scorrelati e con densità spettrale di potenza :

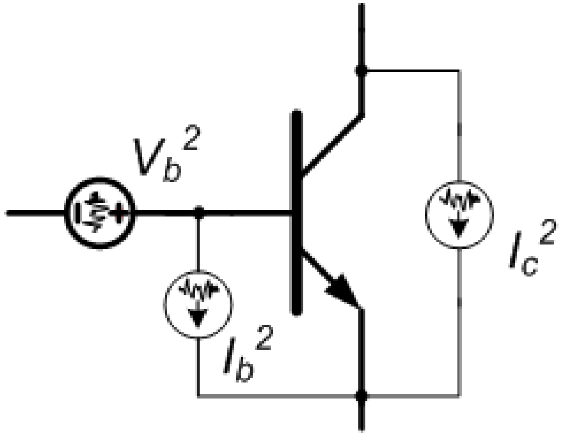
$$\overline{i_C^2} = 2qI_C \quad [A^2/Hz]$$
$$\overline{i_B^2} = 2qI_B \quad [A^2/Hz]$$

q: carica unitaria (1.60210^{-19} coulomb)
I_B , I_C: corrente media di base e di collettore

Rumore Termico della Resistenza di Base

La regione di semiconduttore tra il contatto di base e la regione di base interna al dispositivo si comporta come una resistenza ($r_{bb'}$) ed introduce rumore termico





Il suo contributo è rappresentato da un generatore di tensione in serie alla base, con densità spettrale di rumore:

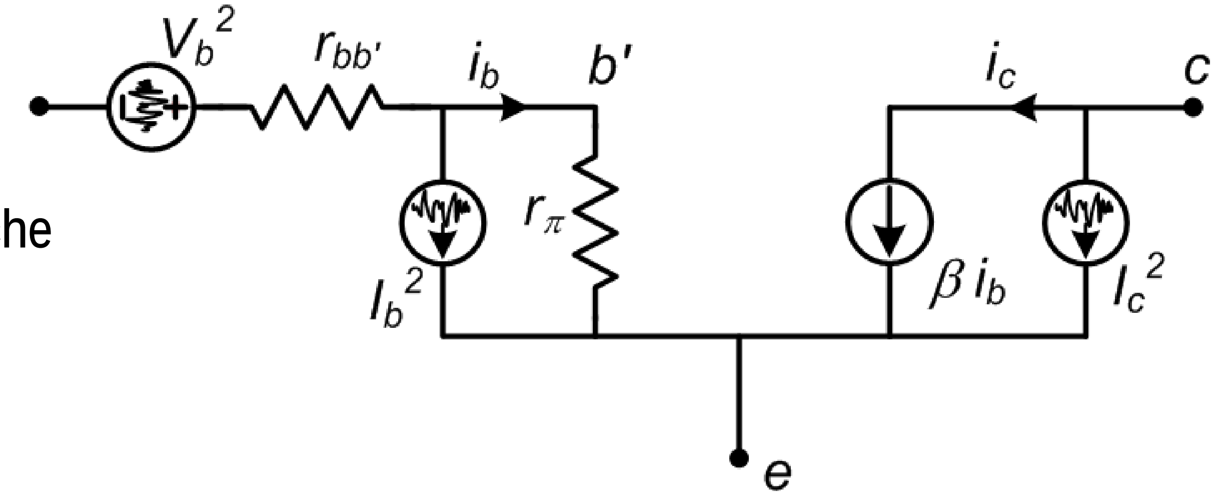
$$V_B^2 = 4k_B T r_{bb'} \quad \left[V^2/Hz\right]$$

Questo contributo di rumore può essere molto significativo

Il processo di fabbricazione e la geometria del dispositivo devono essere ottimizzati per ridurre al minimo la resistenza di accesso

Modello per Piccolo Segnale con Rumore - I

Per analizzare le prestazioni di rumore di un amplificatore con BJT possiamo aggiungere i generatori di rumore al modello equivalente per piccolo segnale:



Ricordando $I_C = b\, I_B$ e che

$$r_p = \frac{V_T}{I_B} = \frac{k_B T}{q \times I_B}$$

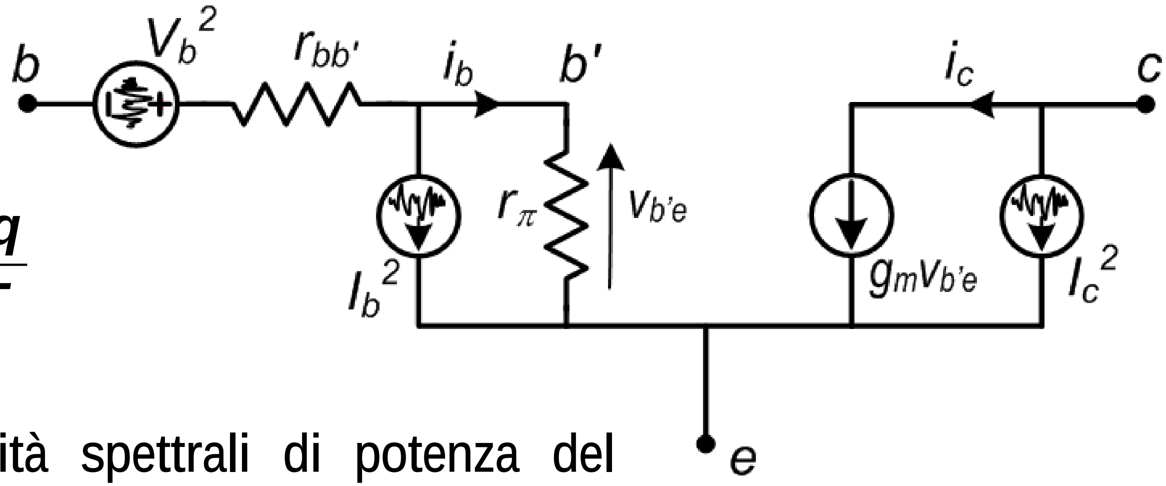
Possiamo riscrivere le densità spettrali di potenza del rumore shot in funzione dei parametri di piccolo segnale:

$$i_B^2 = 2qI_B = \frac{2k_B T}{r_p} \quad \left[\mathrm{A^2/Hz}\right]$$

$$i_C^2 = 2qI_C = 2qb \times I_B = b \times i_B^2 \quad \left[\mathrm{A^2/Hz}\right]$$

Modello per Piccolo Segnale con Rumore - II

Il modello precedente lega la corrente di collettore alla corrente di base attraverso un generatore di corrente controllato in corrente ($i_c = b\, i_b$).
In alternativa è possibile usare un modello con generatore di corrente controllato dalla tensione V_{be} ($i_c = g_m V_{be}$)



Ricordando che

$$g_m = \frac{I_C}{V_T} = \frac{b \times I_B}{V_T} = b\frac{I_B \times q}{k_B T}$$

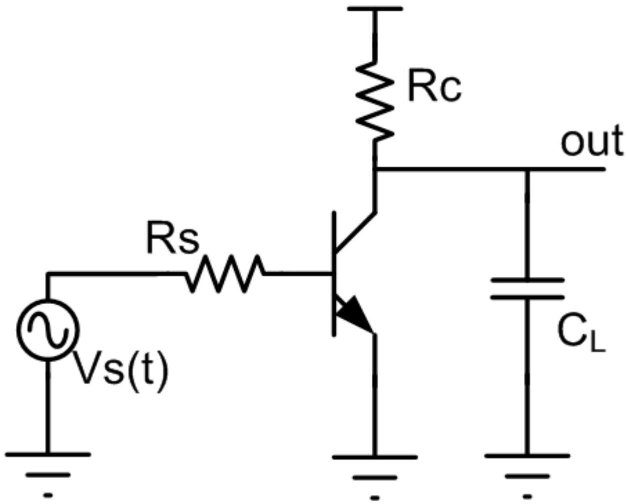
Possiamo riscrivere le densità spettrali di potenza del rumore shot in funzione di *gm*:

$$i_B^2 = 2qI_B = \frac{2k_B T g_m}{b} \quad \left[A^2/Hz\right]$$

$$i_C^2 = 2qI_C = 2k_B T g_m \quad \left[A^2/Hz\right]$$

Esercizio 6

Dato il seguente circuito, calcolare il rapporto segnale/rumore all'uscita

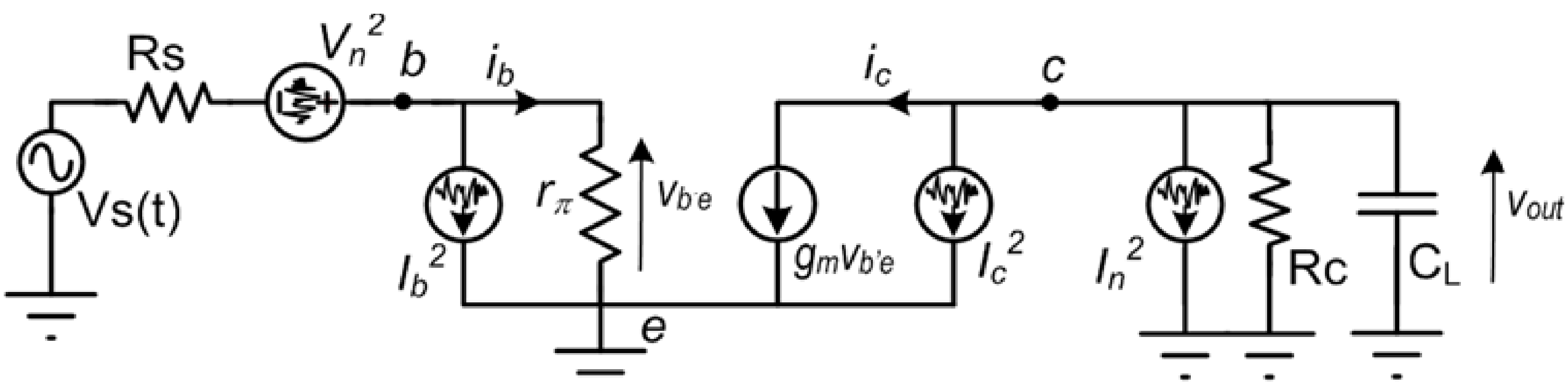


$$I_C = 1mA, \qquad b = 100, \qquad r_{bb'} = 0$$

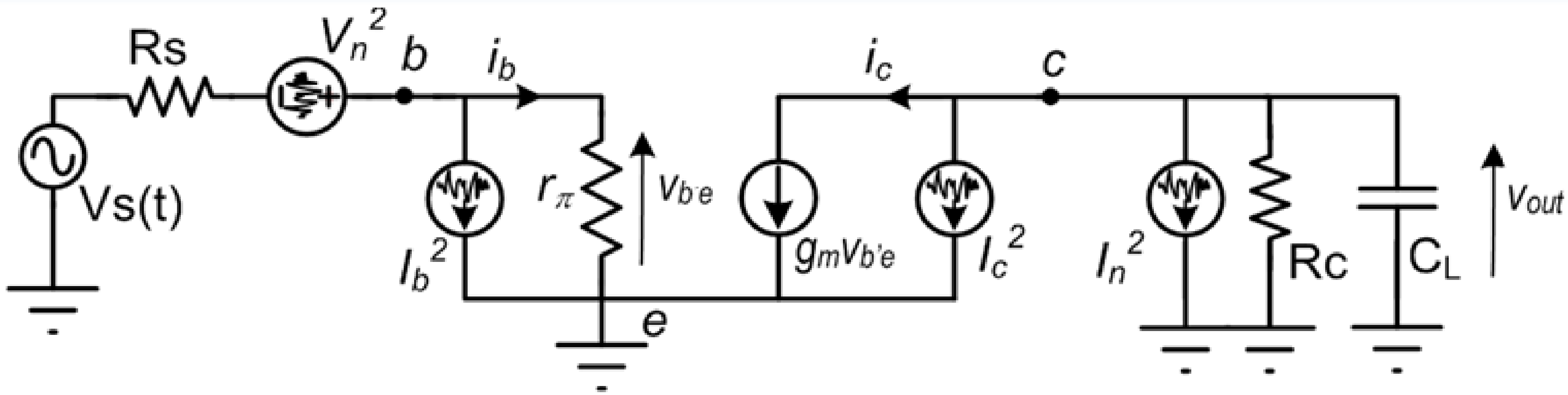
$$R_S = 1kW, \quad R_C = 5kW, \quad C_L = 10pF$$

$$V_s(t) = 1mV\ \cos(2p10^5 t)$$

Circuito equivalente per piccolo segnale con sorgenti di rumore:



Esercizio 6



Calcolo i parametri del circuito al piccolo segnale e le densità spettrali di potenza delle sorgenti di rumore

$$r_p = \frac{V_T}{I_B} = \frac{b \times V_T}{I_C} = 100\,\frac{25\text{mV}}{1\text{mA}} = 2.5\text{kW} \qquad g_m = \frac{I_C}{V_T} = \frac{1\text{mA}}{25\text{mV}} = 40mS$$

Rumore Shot del BJT

$$I_c^2 = 2k_B T g_m = 3.31 \times 10^{-22} A^2 / Hz$$

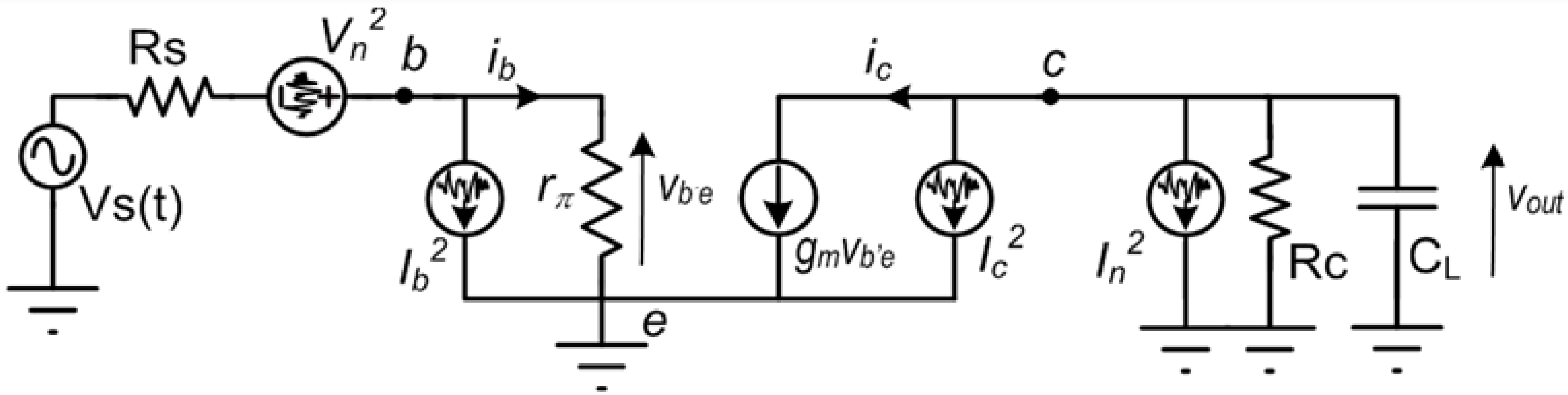
$$I_B^2 = 2k_B T \frac{g_m}{b} = 3.31 \times 10^{-24} A^2 / Hz$$

Rumore termico di R_S ed R_C

$$V_n^2 = 4k_B T \times R_S = 1.65 \times 10^{-17} V^2 / Hz$$

$$I_n^2 = \frac{4k_B T}{R_C} = 3.31 \times 10^{-24} A^2 / Hz$$

Esercizio 6



Calcolo la funzione di trasferimento per il segnale *Vs(t)*

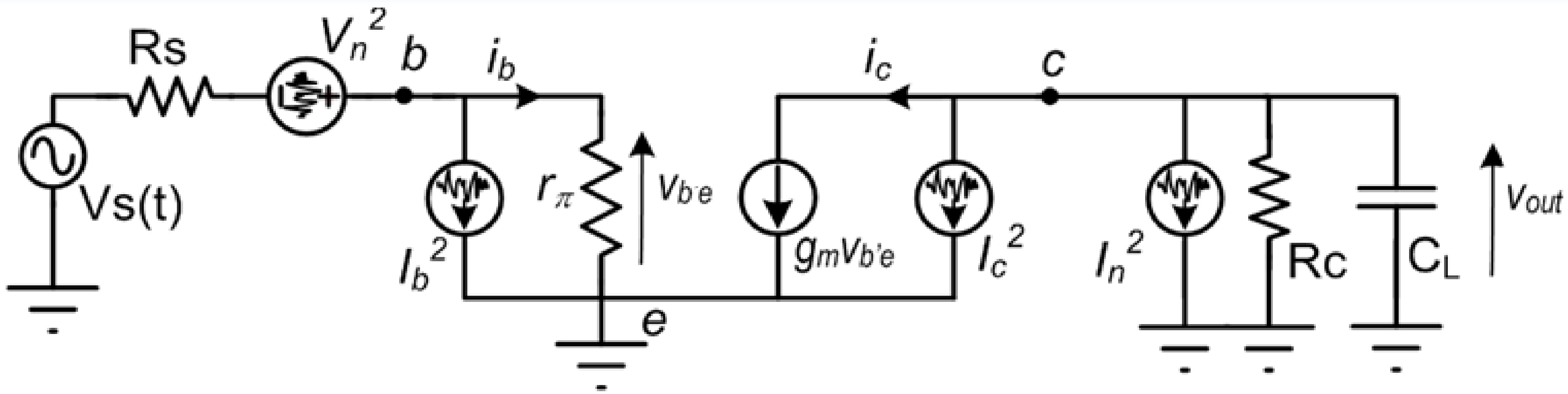
$$\frac{V_{out}}{V_s} = -\frac{r_\pi}{r_\pi + R_s} g_m \left(R_C \, // \, \frac{1}{j2\pi f C_L} \right) = -\frac{r_\pi}{r_\pi + R_s} g_m \frac{R_C}{1 + j2\pi f R_C C_L}$$

Guadagno: $g_m \dfrac{R_C r_\pi}{r_\pi + R_s} = 143$ Banda: $f_p = \dfrac{1}{2\pi R_C C_L} = 3.18\ MHz$

Il segnale Vs(t), a 100kHz, cade in banda e passa in uscita amplificato

$$V_{out}(t) = -0.143 \ \cos(2\pi 10^5 t) \qquad V_{out,rms} = \frac{0.143\text{mV}}{\sqrt{2}} = 101\text{mV}_{rms}$$

Esercizio 6



Contributi di rumore in uscita entro la banda passante dell'amplificatore:

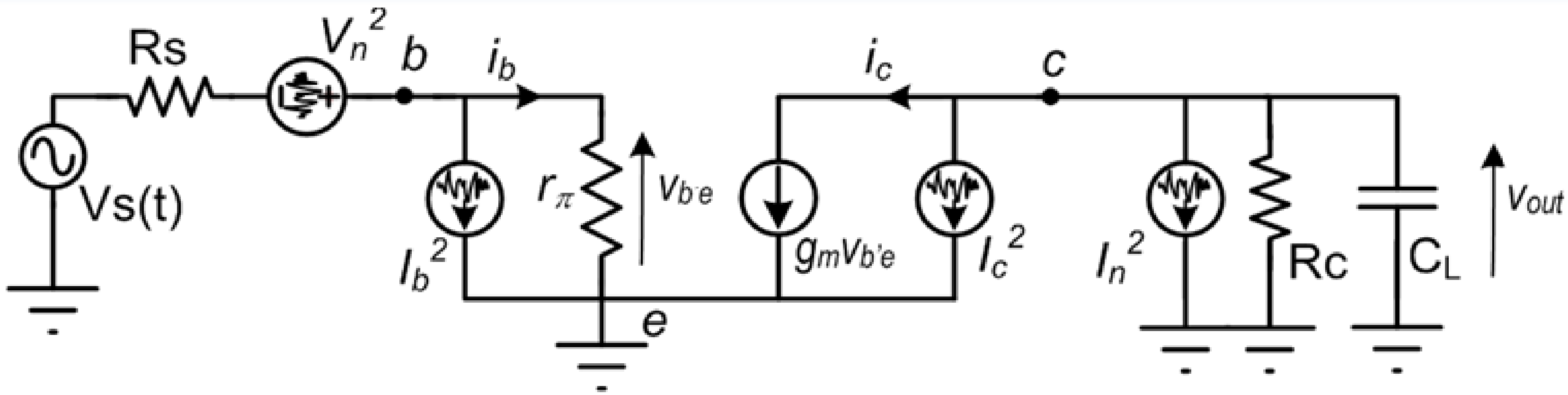
$$\left.V^2_{n,out}\right|_{V_n^2} = V_n^2\left(g_m \frac{r_\pi R_C}{r_\pi + R_s}\right)^2 = V_n^2 (143)^2 = 3.38 \times 10^{-13}\, V^2/Hz$$

$$\left.V^2_{n,out}\right|_{I_B^2} = I_B^2\left(\frac{r_\pi R_s}{r_\pi + R_s} g_m R_C\right)^2 = I_B^2 (142857)^2 = 6.76 \times 10^{-14}\, V^2/Hz$$

$$\left.V^2_{n,out}\right|_{I_C^2} = I_C^2 R_C{}^2 = 8.28 \times 10^{-15}\ \mathrm{V}^2/Hz$$

$$\left.V^2_{n,out}\right|_{I_n^2} = I_n^2 R_C{}^2 = 8.28 \times 10^{-17}\, V^2/Hz$$

Esercizio 6



Potenza di rumore totale in uscita:

$$V^2_{n\_out,rms} = \left(V^2_{n,out}\Big|_{V_n^2} + V^2_{n,out}\Big|_{I_B^2} + V^2_{n,out}\Big|_{I_C^2} + V^2_{n,out}\Big|_{I_n^2} \right)\frac{\pi}{2} f_p = 2.08\times10^{-6}V^2$$

$$V_{n\_out,rms} = \sqrt{2.08\times10^{-6}} = 1.44\ \mathrm{mV_{rms}}$$

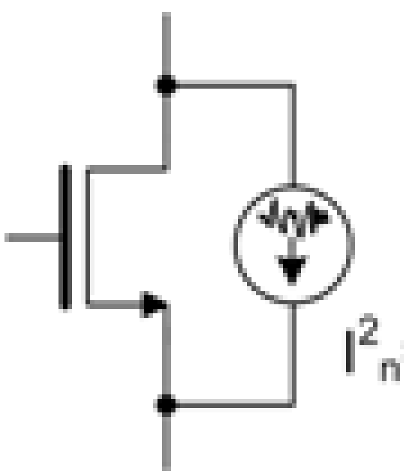
$$SNR = 10\ Log\left(\frac{(101\,\mathrm{mV_{rms}})^2}{(1.44\,\mathrm{mV_{rms}})^2}\right) = 36.8dB$$

Rumore Termico del MOSFET

Il canale del MOSFET si comporta come un resistore, il cui valore è controllato dalla tensione al terminale di Gate.

Il MOSFET introduce quindi rumore termico.

Questa sorgente di rumore è rappresentabile come un generatore di corrente in parallelo ai terminali di Drain e Source che introduce fluttuazioni sulla corrente che scorre nel dispositivo.



La densità spettrale di potenza, quando il MOSFET opera in saturazione, vale:

$$\boldsymbol{i_n^2 = 4k_B T \times \gamma \times g_m \quad \left[A^2/Hz\right]}$$

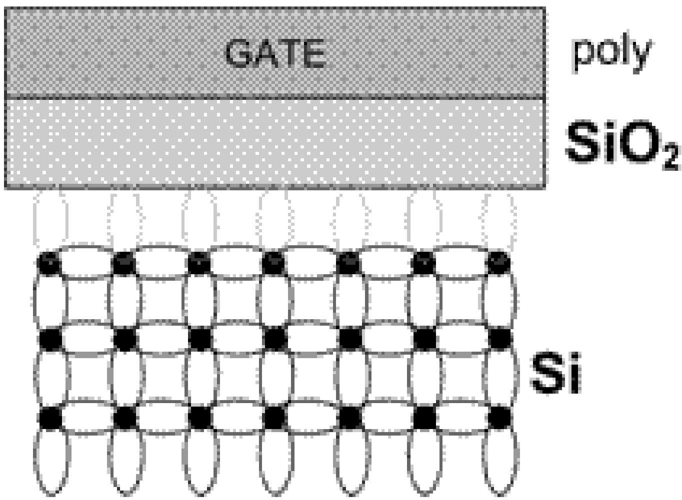
k_B: costante di Boltzman (1.38 10^{-23})

T: temperatura assoluta

γ: costante, di valore 2/3

g_m: transconduttanza del dispositivo

Rumore Flicker del MOSFET

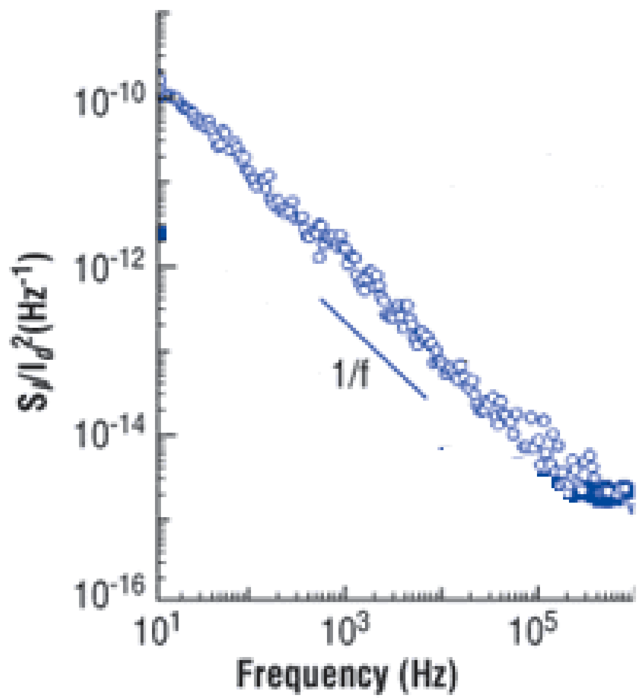


La conduzione della corrente avviene all'interfaccia tra semiconduttore (Si) ed ossido (SiO2).

I difetti cristallini dovuti alla discontinuità Si/SiO2 introduco stati energetici indesiderati che trattengono e rilasciano i portatori in modo "casuale".

Rumore sulla corrente di Drain, particolarmente significativo in bassa frequenza: Rumore Flicker

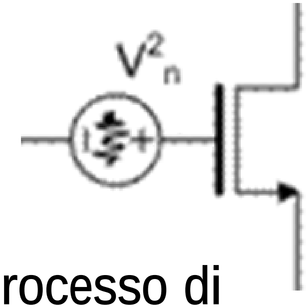
La densità spettrale di potenza non è bianca ma scende con pendenza 1/f

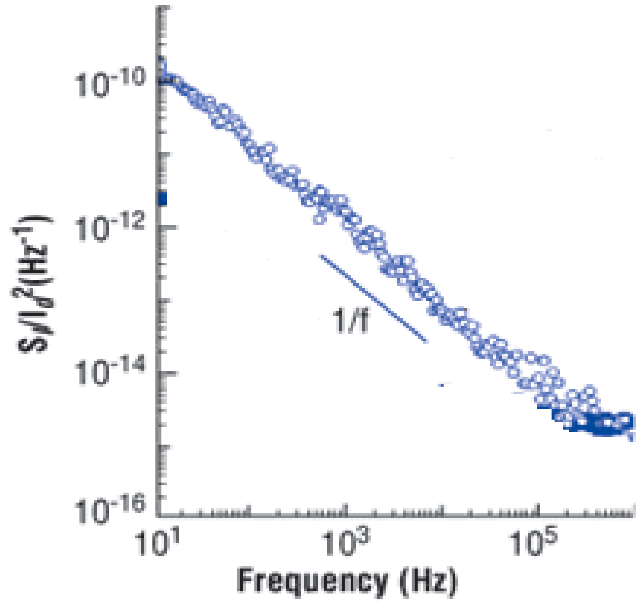


Modello del Rumore Flicker

Il rumore Flicker è modellizzato da un generatore di tensione in serie al Gate del dispositivo con densità spettrale:

$$V_n^2 = \frac{K_f}{C_{ox}WL}\frac{1}{f}\ \left[V^2/Hz\right]$$



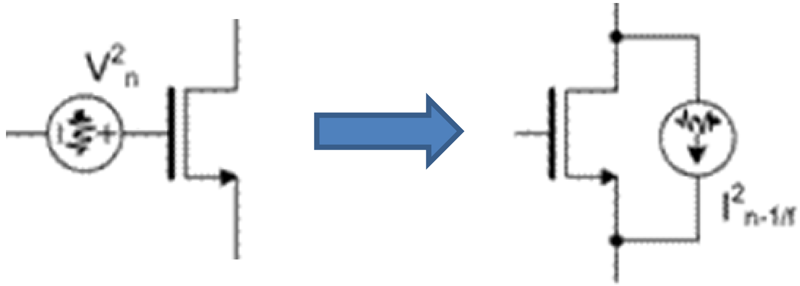


k_F: costante dipendente dal processo di fabbricazione

C_{ox}: capacità specifica dell'ossido di gate

W,L: dimensioni del gate

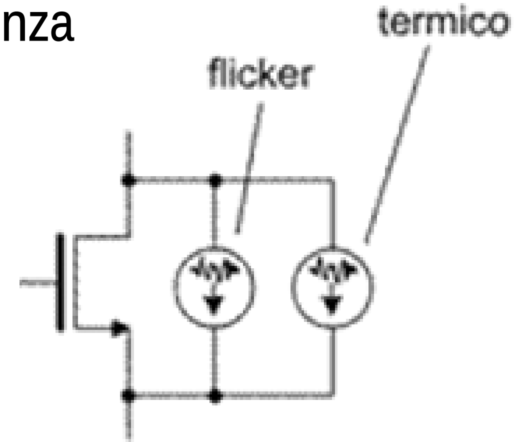
E' possibile rappresentare il rumore flicker con un generatore di corrente in parallelo a Drain e source, in modo da poterlo direttamente paragonare al rumore termico

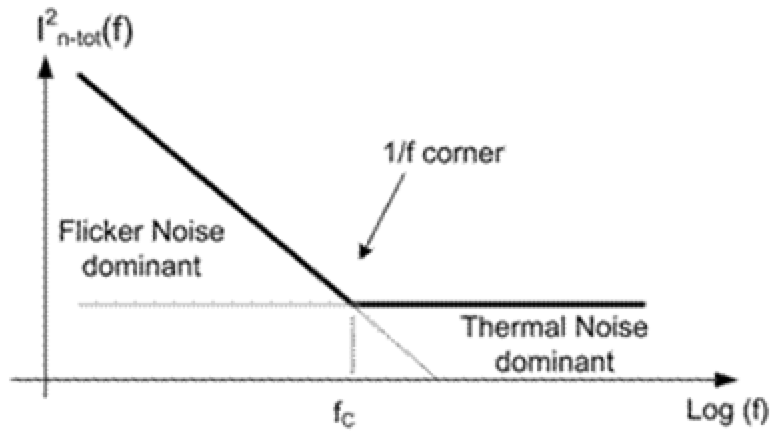


$$i_{n\_1/f}^2 = g_m^2 \times V_n^2 = \frac{g_m^2 K_f}{C_{ox}WL}\frac{1}{f}\ \left[A^2/Hz\right]$$

Frequenza di “Corner” del rumore

La densità spettrale di potenza del rumore totale generato dal MOSFET è dominata dal rumore Flicker in bassa frequenza e dal rumore termico in alta frequenza

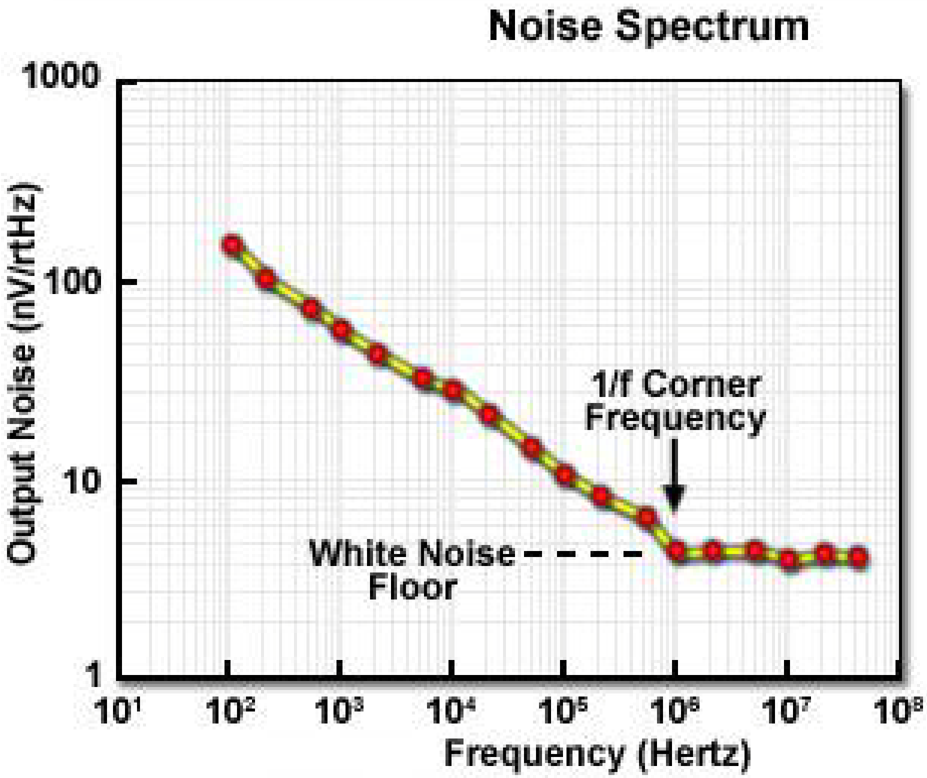




La frequenza di transizione (corner frequency) può essere facilmente calcolata imponendo l’uguaglianza tra rumore Flicker e rumore termico:

$$i^2_{n\_1/f} = i^2_{n\_th} : \quad \frac{g_m^2 K_f}{C_{ox}WL}\frac{1}{f_c} = 4k_B T\gamma \cdot g_m \Rightarrow f_c = \frac{1}{4k_B T\gamma}\frac{K_f}{C_{ox}WL} g_m$$

Rumore del Mosfet



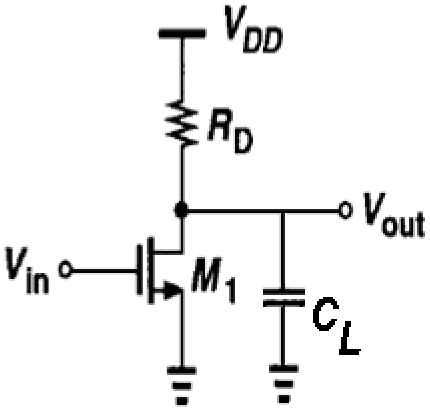
La frequenza di corner è tipicamente superiore a decine o centinaia di KHz

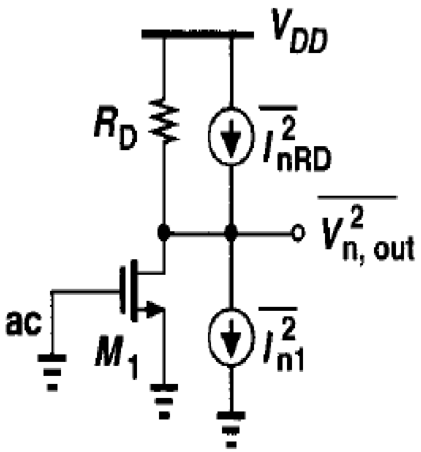
Il rumore in bassa frequenza del MOSFET è quindi completamente dominato dal rumore Flicker, ordini di grandezza superiore al rumore termico

A frequenze molto basse < 100Hz anche il transistor BJT soffre di rumore Flicker. L'intensità (e quindi la freq. di corner) è molto inferiore rispetto al MOSFET poiché la corrente del BJT non scorre in regioni superficiali ricche di difetti cristallini

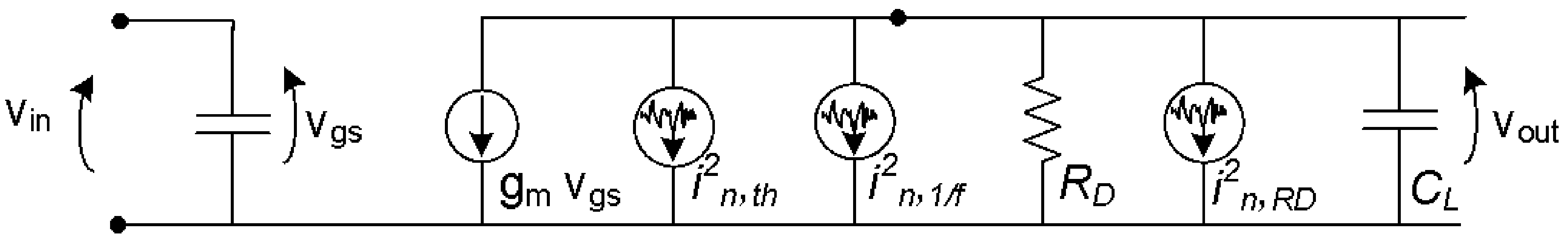
Esercizio 7

Calcolare in forma letterale la densità spettrale di potenza del rumore in uscita

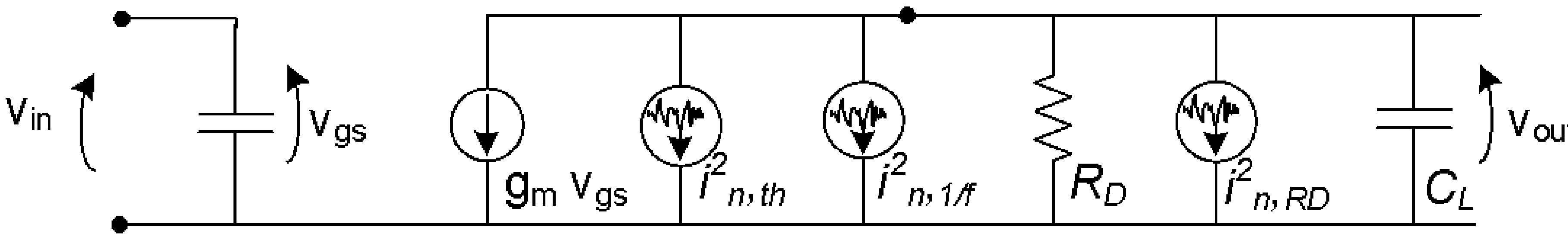




Soluzione: circuito a piccolo segnale



Esercizio 7



Le tre sorgenti di rumore di corrente sono scorrelate. Vanno sommate in potenza. La corrente totale di rumore scorre nella resistenza di carico (R_D) sviluppando tensione di rumore all'uscita

$$V_{n,out}^2 = R_D^2\left(i_{n,th}^2 + i_{n,1/f}^2 + i_{n,RD}^2\right) = \left(4k_BT\gamma g_m + \frac{K_f}{C_{ox}WL}g_m^2\frac{1}{f} + \frac{4k_BT}{R_D}\right)R_D^2$$

Questa equazione suggerisce che, per ridurre il rumore totale in uscita (e quindi migliorare SNR?!?) sembra necessario ridurre g_m ed $R_{D.}$

Il guadagno di tensione dell'amplificatore è g_mR_D. Per migliorare le prestazioni di rumore è necessario ridurre il guadagno? Ma allora anche l'ampiezza di segnale viene ridotta?... L'osservazione del rumore in uscita, senza considerare il segnale, puo portare a conclusioni errate! …

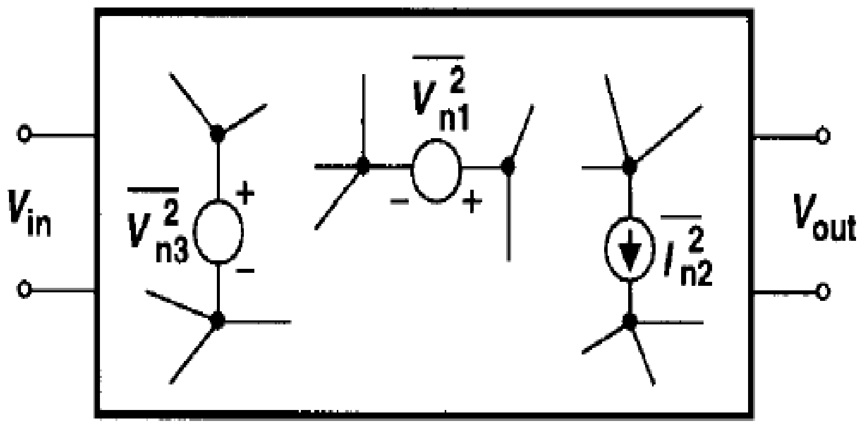
Rumore Elettronico

- Sorgenti di rumore in Diodi, BJTs, MOSFETs
- *Rumore equivalente all'ingresso di amplificatori*
- Rumore nel dominio del tempo

Rappresentazione del Rumore negli Amplificatori

In generale un amplificatore elettronico è costituito da diversi componenti, ciascuno dei quali contribuisce al rumore generato dall'amplificatore.

Se non conosciamo il livello di segnale (e non siamo in grado di stimare SNR), come possiamo quantificare le prestazioni di rumore?

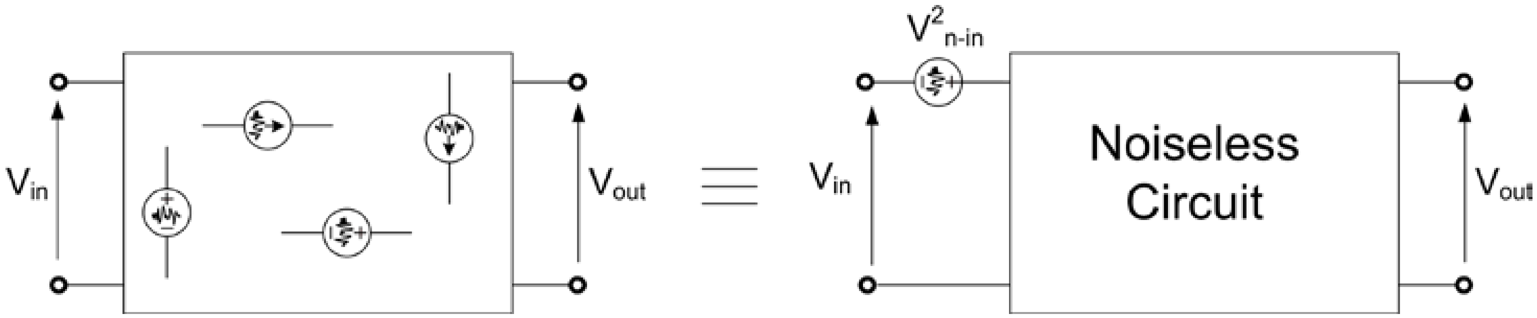


Seguendo quanto fatto in precedenza (Esercizio 6, 7) verrebbe da pensare che sia sufficiente calcolare il rumore totale generato in uscita e cercare di minimizzarlo.

Questo pero porta a conclusioni errate perché non si sta considerando l'effetto dell'amplificazione sul segnale utile.

Rumore Equivalente all'Ingresso

In pratica risulta convenente riportare all'ingresso dell'amplificatore il rumore totale calcolato in uscita e considerare l'amplificatore non-rumoroso.



Il rumore equivalente all'ingresso risulta in serie al segnale e viene processato dall'amplificatore esattamente come il segnale utile.

Minimizzare la densità spettrale di potenza del rumore equivalente in ingresso permette quindi di massimizzare il rapporto segnale/rumore

La procedura per il calcolo di $V^2_{n,in}$ è:

(1) calcolo del guadagno di tensione dell'amplificatore: A_v

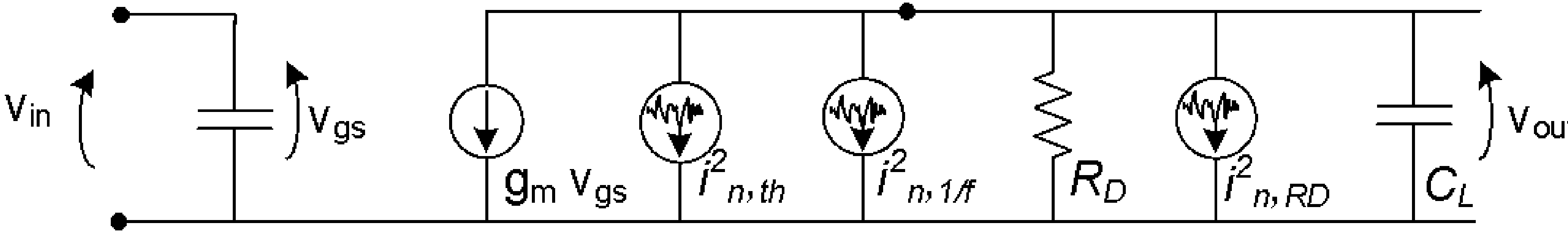
(2) calcolo del rumore totale all'uscita $V^2_{n,out}$

(3) $V^2_{n,in} = V^2_{n,out}/A^2v$

Esercizio 8

Calcolare in forma letterale la densità spettrale di potenza della tensione equivalente di rumore all’ingresso nell’amplificatore a source comune

Soluzione:



$$A_V^2 = g_m^2 R_D^2$$

$$V_{n,out}^2 = R_D^2\left(i_{n,th}^2 + i_{n,1/f}^2 + i_{n,RD}^2\right) = \left(4k_B T\gamma g_m + \frac{K_f}{C_{ox}WL} g_m^2 \frac{1}{f} + \frac{4k_B T}{R_D}\right) R_D^2$$

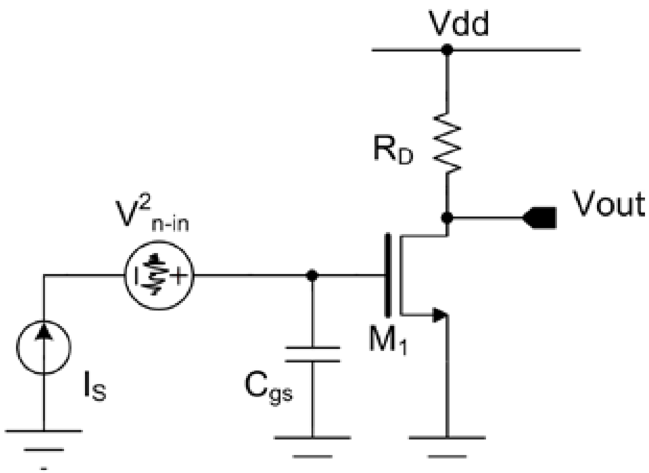
$$V_{n,in}^2 = \left(\frac{4k_B T\gamma}{g_m} + \frac{K_f}{C_{ox}WL}\frac{1}{f} + \frac{4k_B T}{g_m^2 R_D}\right)$$

Per ridurre il rumore equivalente all’ingresso è necessario aumentare g_m ed R_D. Esattamente il contrario di quanto concluso osservando il rumore in uscita

Rumore equivalente all'ingresso

Il rumore equivalente all'ingresso deve essere in grado di riprodurre il rumore totale generato dall'amplificatore in qualunque situazione (qualunque sia la sorgente che pilota l'amplificatore)

Riprendiamo l'amplificatore a source comune con il generatore di tensione di rumore equivalente all'ingresso: se l'amplificatore viene pilotato in corrente, la tensione $V^2_{n,in}$ non genera nessun rumore all'uscita

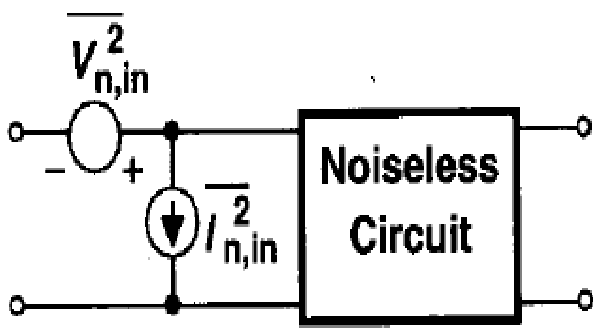


$$V_{out} = I_s \frac{1}{\omega C_{in}} g_m R_D$$

$$V^2_{n,Out} = 0 \quad ?!?!$$

Per poter riprodurre il rumore totale in uscita in qualunque situazione, è necessario introdurre anche un generatore di corrente di rumore equivalente all'ingresso

Tensione e Corrente di Rumore all’ingresso



Per rappresentare le prestazioni di rumore di un amplificatore sono necessari nel caso generale 2 generatori di rumore all’ingresso:

(1) Generatore di tensione di rumore equivalente in serie all’ingresso: $V^2_{n,in}$

(2) Generatore di corrente di rumore equivalente in serie all’ingresso: $I^2_{n,in}$

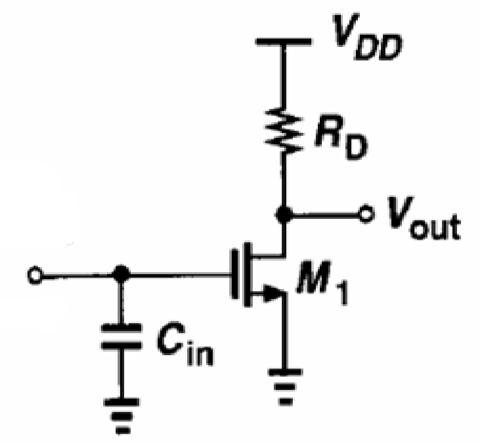
$V^2_{n,in}$ è calcolato dividendo il rumore in tensione all’uscita con ingresso in corto-circuito, per il guadagno di tensione dell’amplificatore ($A_V = V_{out}/V_{in}$)

$I^2_{n,in}$ è calcolato dividendo il rumore in tensione all’uscita con ingresso in circuito aperto, per il guadagno di trans-resistenza dell’amplificatore ($A_R = V_{out}/I_{in}$)

I due generatori equivalenti di rumore sono originati dalle stesse sorgenti di rumore (interne all’amplificatore). Sono quindi in generale correlati. La potenza totale da loro generata va quindi calcolata sommando i due contributi linearmente: $P = (X_1+X_2)^2$

Esercizio 9

Trascurando il rumore Flicker, Calcolare le densità spettrali di potenza di $V^2_{n,in}$ e $I^2_{n,in}$ per l'amplificatore



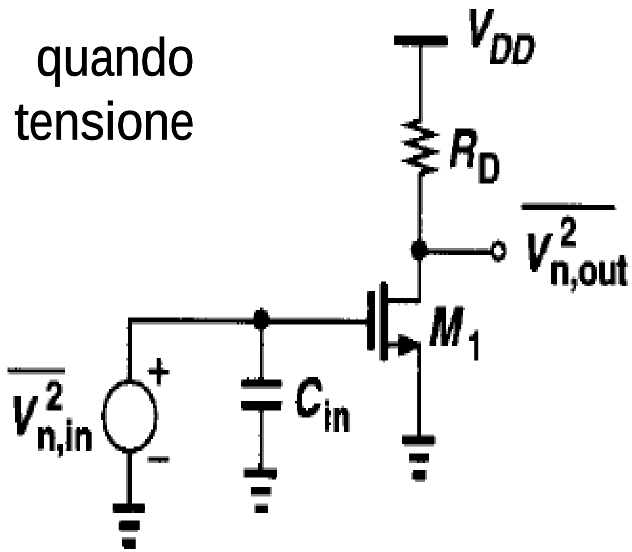
La densità spettrale di rumore della tensione di uscita, sia con ingresso in corto che in aperto vale:

$$V^2_{n,out} = \left(4k_BT\gamma g_m + \frac{4k_BT}{R_D}\right) R_D^2$$

$V^2_{n,in}$ deve riprodurre il rumore di uscita quando l'ingresso è in corto-circuito (pilotaggio in tensione dell'amplificatore)

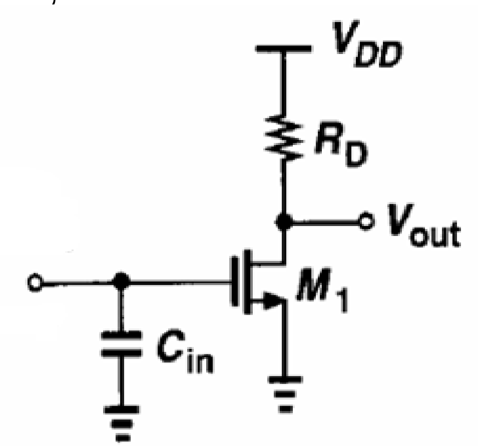
$$V^2_{n,out} = A_V^2 \cdot V^2_{n,in} = \left(g_m \cdot R_D\right)^2 \cdot V^2_{n,in}$$

$$V^2_{n,in} = \left(\frac{4k_BT\gamma}{g_m} + \frac{4k_BT}{g_m^2 R_D}\right)$$



Esercizio 9

Trascurando il rumore Flicker, Calcolare le densità spettrali di potenza di $V^2_{n,in}$ e $I^2_{n,in}$ per l'amplificatore



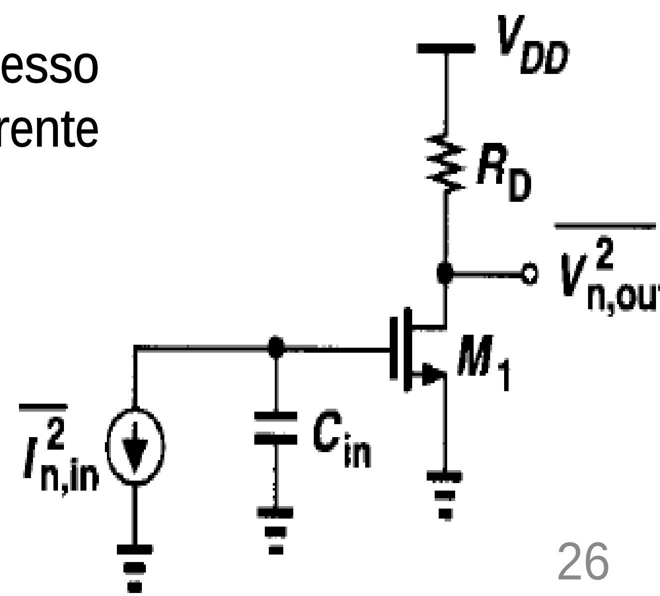
La densità spettrale di rumore della tensione di uscita, sia con ingresso in corto che in aperto vale:

$$V^2_{n,out} = \left(4k_BT\gamma g_m + \frac{4k_BT}{R_D}\right)R_D^2$$

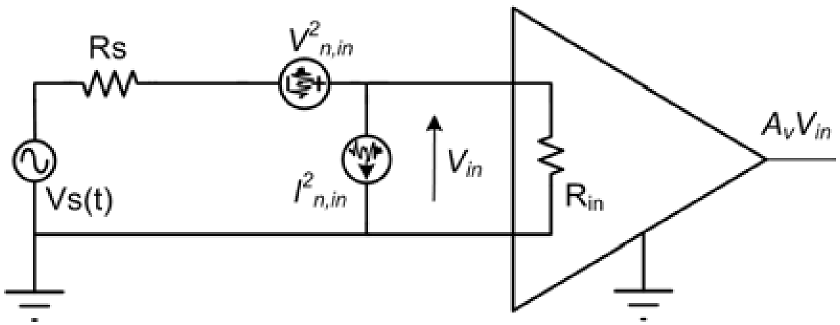
$I^2_{n,in}$ deve riprodurre il rumore di uscita quando l'ingresso è in circuito aperto (pilotaggio in corrente dell'amplificatore)

$$V^2_{n,out} = A_R^2 \cdot I^2_{n,in} = \left(\frac{g_m \cdot R_D}{\omega C_{in}}\right)^2 \cdot I^2_{n,in}$$

$$I^2_{n,in} = (\omega C_{in})^2\left(\frac{4k_BT\gamma}{g_m} + \frac{4k_BT}{g_m^2 R_D}\right)$$



Considerazioni sull'impatto di $V^2_{n,in}$ e $I^2_{n,in}$



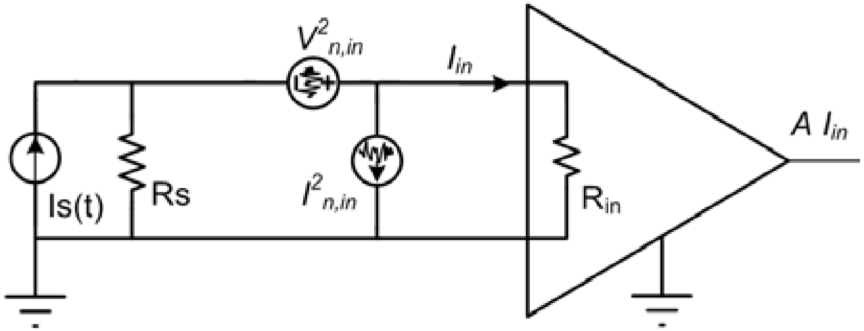
L' impatto di $V^2_{n,in}$ e $I^2_{n,in}$ sul rumore in uscita dipende dall'impedenza di sorgente (R_s) e dall'impedenza d'ingresso (R_{in}) dell'amplificatore

Per un amplificatore di tensione si ha $R_s \rightarrow 0$ ed $R_{in} \rightarrow \infty$. L'impatto di $I^2_{n,in}$ è trascurabile:

$$V^2_{n,out}\Big|_{V^2_{n,in}} = A_v^2 \cdot V^2_{n,in}\left(\frac{R_{in}}{R_{in}+R_s}\right)^2 \xrightarrow{R_{in}\rightarrow\infty \text{ or } R_s\rightarrow 0} A_v^2 \cdot V^2_{n,in}$$

$$V^2_{n,out}\Big|_{I^2_{n,in}} = A_v^2 \cdot I^2_{n,in}\left(R_{in} // R_s\right)^2 \xrightarrow{R_s\rightarrow 0} 0$$

Considerazioni sull’impatto di $V^2_{n,in}$ e $I^2_{n,in}$



L’ impatto di $V^2_{n,in}$ e $I^2_{n,in}$ sul rumore in uscita dipende dall’impedenza di sorgente (R_s) e dall’impedenza d’ingresso (R_{in}) dell’amplificatore

Per un amplificatore di corrente si ha $R_s \to \infty$ ed $R_{in} \to 0$. L’impatto di $V^2_{n,in}$ è trascurabile:

$$V^2_{n,out}\Big|_{V^2_{n,in}} = A_R^2 \cdot \left(\frac{V_{n,in}}{R_{in}+R_s}\right)^2 \xrightarrow{R_s\to\infty} 0$$

$$V^2_{n,out}\Big|_{I^2_{n,in}} = A_R^2 \cdot I^2_{n,in}\left(\frac{R_s}{R_{in}+R_s}\right)^2 \xrightarrow{R_s\to\infty \text{ or } R_{in}\to 0} A_R^2 \cdot I^2_{n,in}$$

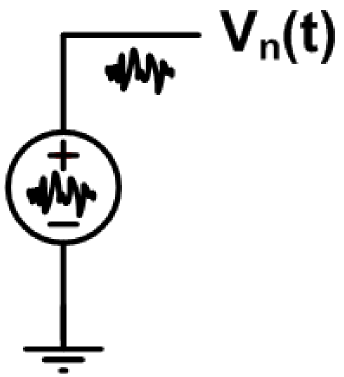
Rumore Elettronico

- Sorgenti di rumore in Diodi, BJTs, MOSFETs
- Rumore equivalente all’ingresso di amplificatori
- *Rumore nel dominio del tempo*

Rumore nel dominio del tempo

Fino ad ora abbiamo discusso le proprietà del rumore elettronico nel dominio della frequenza. Questo è utile per studiare la generazione e la propagazione del rumore nei circuiti elettronici.

L'analisi osservando e descrivendo il rumore nel domino del tempo (in modo statistico) non risulta particolarmente utile per analizzare i circuiti. Può essere utile per stimare l'impatto macroscopico del rumore in diverse applicazioni elettroniche (esempio: stima della Probabilità di Errore (BER) in comunicazioni digitali)

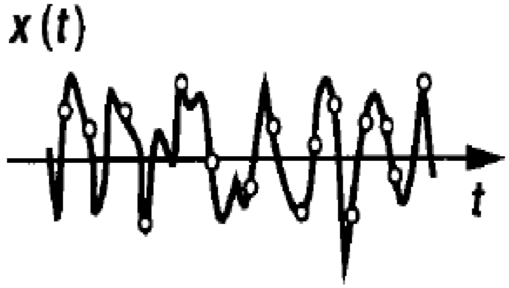


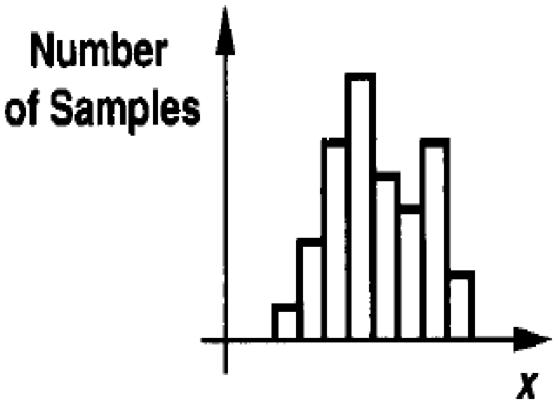
Una tensione rumorosa assumi valori casuali nel tempo.

E' possibile cercare di stimare la 'probabilità' che la tensione istantanea raggiunga un determinato valore usando le proprietà statistiche del rumore

Istogramma dell’Ampiezza

Supponiamo di campionare e misurare una tensione rumorosa (X) a diversi istanti di tempo. Dividiamo X in diversi intervalli e rappresentiamo il numero di occorrenze per ciascun intervallo di tensione (numero di volte che la tensione cade in quell’intervallo)



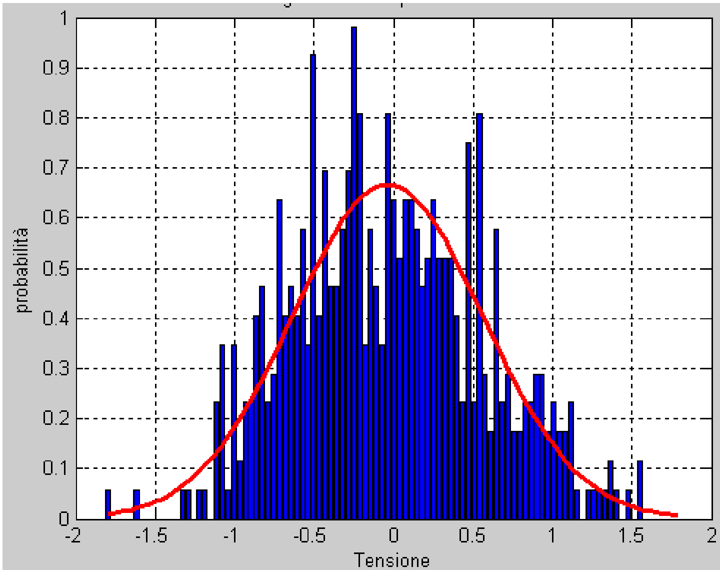


La curva che otteniamo (istogramma) fornisce indicazioni sulle proprietà statistiche del rumore.

Interpolando l’istogramma con una curva continua (oppure riducendo l’ampiezza degli intervalli di tensione) e normalizzando in modo che l’area sia unitaria, otteniamo la PDF(X).

La PDF di X permette di stimare la probabilità che la tensione X cada all’interno di un intervallo fissato

Funzione Densità di Probabilità



La funzione continua (in rosso) PDF(X) permette di calcolare la probabilità che la tensione di rumore cada in un ben preciso intervallo.

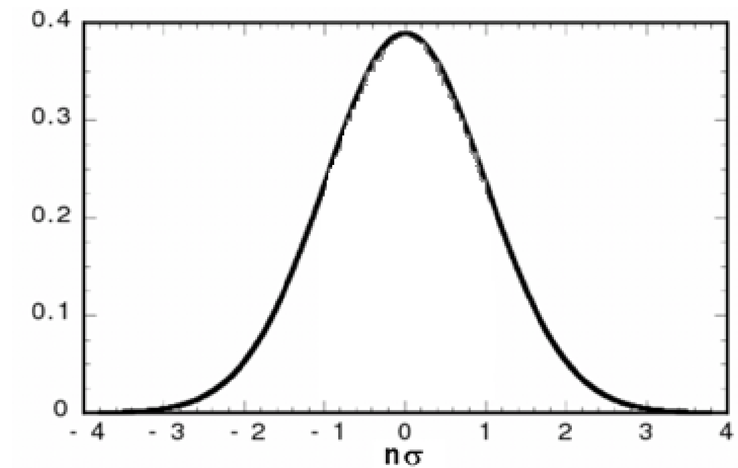
La probabilità che il rumore istantaneo (X) cada all'interno dell'intervallo X_1-X_2 coincide con l'area sottesa dalla PDF sull'intervallo X_1-X_2 :

$$\mathbf{Prob}(\mathbf{X} \in [X_1, X_2]) = \int_{X_1}^{X_2} PDF(X)\, dX$$

Distribuzione Gaussiana

Il teorema del "LIMITE CENTRALE" dimostra come la PDF di una fenomeno statistico che è l'aggregazione (somma) di diversi processi statistici indipendenti (come è il caso del rumore elettronico) è indipendente dalla PDF dei singoli processi ed ha la seguente espressione:

$$PDF(X) = \frac{1}{s\sqrt{2p}}\, e^{-\frac{(X-m)^2}{2s^2}}$$



denominata Distribuzione Normale o Gaussiana.

m è il valore medio (e per il rumore è nullo)

s prende il nome di "deviazione" standard e rappresenta l'allargamento orizzontale della curva. Maggiore è **s** e maggiore è la "variabilità" (e quindi l'entità) del rumore.

Deviazione standard e Potenza di Rumore

La deviazione standard di una serie di campioni casuali (X_n) con valor medio nullo (m=0) può essere calcolata nel modo seguente:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_n x_n^2} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_n x(nT)^2}$$

Se X(t) è una funzione tempo-continua (come il rumore elettronico) possiamo riscrivere la deviazione standard:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[x(t)\right]^2 dt} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \left[x(t)\right]^2 dt = X_{rms}^2$$

Il quadrato della deviazione standard (che prende il nome di varianza) coincide con la potenza efficace (rms) del segnale X(t)

La varianza permette anche di unire l'analisi di rumore nel domino del tempo e della frequenza:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\,df = X_{rms}^2 = \sigma^2$$

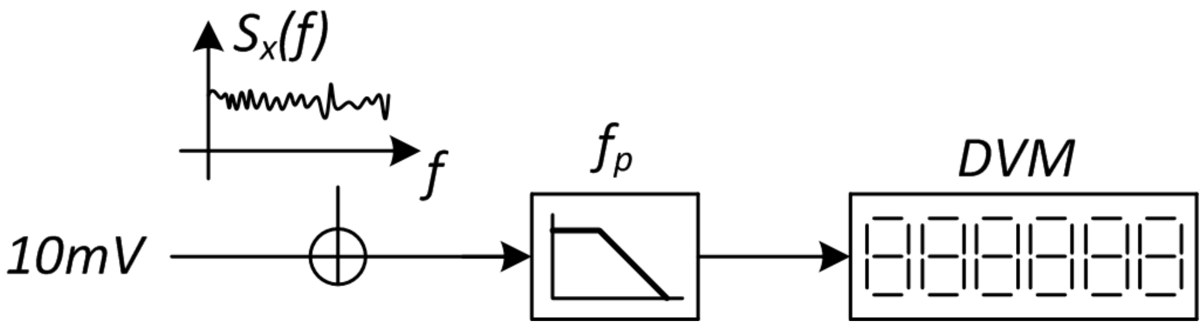
Esercizio 10

Si vuole misurare con un voltmetro digitale una tensione nominale di 10mV, affetta da rumore termico con PDF gaussiana e densità spettrale di potenza di $(100nV)^2/Hz$

Viene introdotto un filtro passa-basso del primo ordine, di fronte al voltmetro, per limitare la potenza di rumore. Calcolare la frequenza di taglio del filtro per garantire un errore di misura inferiore allo 0.1% con probabilità del 95%.

95 misure su 100 effettuate devono fornire una lettura compresa tra

$10mV - 10uV < V_{DVM} < 10mV + 10uV$



Nota la densità spettrale di potenza possiamo calcolare la varianza in funzione della banda del filtro

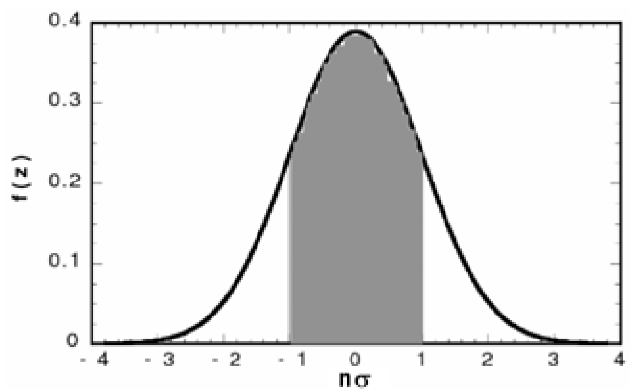
$$\sigma^2 = S_x f_p \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 10

Il rumore ha distribuzione gaussiana con valor medio nullo.

Con il 95% di probabilità X assume valori compresi nell'intervallo : $-\sigma < X < \sigma$

$$\int_{x_1=-2\sigma}^{x_2=+2\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = 0.95$$



Deviation (norm. to +/-σ)	Probability
0.6745	0.5
1	0.6828
2	0.9546
3	0.9972

Per fare misure con errore minore di 0.1% nel 95% dei casi dobbiamo quindi imporre:

$$2\sigma < 10mV \cdot 0.001 = 10\mu V \qquad 2\sqrt{S_x f_p \frac{\pi}{2}} < 10mV \cdot 0.001 \rightarrow f_p < \frac{6.37}{4} kHz$$