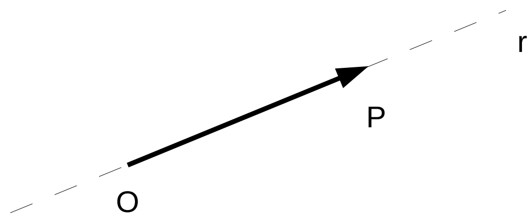
VETTORI E SCALARI

DEFINIZIONI

Si definisce *scalare* una grandezza definita interamente da un solo numero, affiancato dalla sua **unità di misura**.

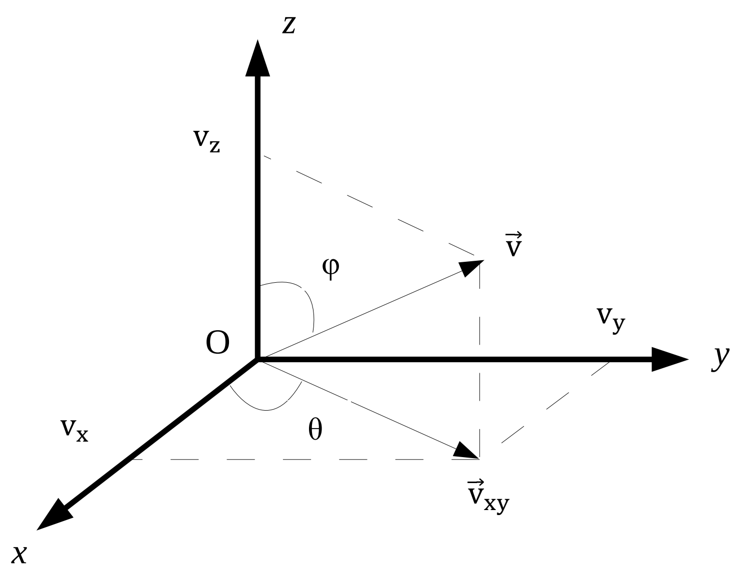
Un *vettore* è invece una grandezza caratterizzata da 3 entità: un valore numerico, chiamato *modulo* (o *intensità*), affiancato dalla sua **unità di misura**; una *direzione*; un *verso*. Graficamente un vettore si rappresenta come un segmento orientato:



la lunghezza del segmento OP costituisce il modulo del vettore; la retta r su cui il segmento giace indica la direzione del vettore; la punta della freccia ne definisce infine il verso; il punto O da cui il vettore parte è detto *punto di applicazione*; il punto P in cui il vettore termina si chiama *estremo libero*. Nei testi scritti i vettori sono indicati con i simboli: **v**, $\underline{v}$, $\vec{v}$. Il modulo di un vettore si indica di conseguenza con $|\vec{v}|$ oppure v.

Due vettori si dicono tra loro *uguali* se hanno stesso modulo, direzione e verso. Due vettori che hanno lo stesso modulo, stessa direzione ma verso opposto si dicono invece *opposti*. Vettori di modulo unitario sono più comunemente chiamati *versori* e si indicano $\hat{v}$.

Quando un vettore è inserito all'interno di un *sistema di riferimento*, le sue proiezioni lungo gli assi vengono dette *componenti* del vettore. In **coordinate cartesiane** esse si indicano v_x, v_y e v_z. Indicando poi con φ l'angolo formato dal vettore $\vec{v}$ e l'asse *z*, con θ l'angolo tra $\vec{v}_{xy}$ (proiezione di $\vec{v}$ sul piano xy) e l'asse *x*, si possono scrivere le componenti del vettore in **coordinate polari**:



$$\begin{cases} v_x = v\, sin\varphi\, cos\theta \\ v_y = v\, sin\varphi\, sin\theta \\ v_z = v\, cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \\ \theta = atg(v_y/v_x) \\ \varphi = acos\left(v_z/\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\right) \end{cases}$$

Introducendo i versori degli assi come $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ e $\vec{u}_z$ (spesso in letteratura rispettivamente î, ĵ e $\hat{k}$), il significato delle componenti è immediato:

$$\begin{cases} \vec{v} = v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y + v_z\vec{u}_z \\ v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \end{cases}$$

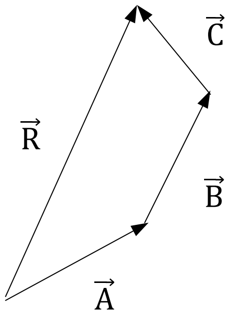
Teorema di Pitagora

OPERAZIONI SUI VETTORI

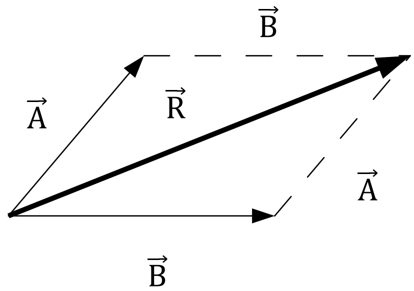
• <u>SOMMA</u>

La somma tra due o più vettori si può risolvere con un *metodo grafico*:

① i vettori da sommare si disegnano uno di seguito all'altro, in modo da tale che il punto di applicazione di ognuno coincida con l'estremo libero del precedente; il vettore somma $\vec{R}$ risulta essere quel vettore che ha il punto di applicazione del primo e l'estremo libero dell'ultimo addendo.



② i due vettori da sommare si disegnano a partire dallo stesso punto di applicazione e si chiude il parallelogramma disegnando in cascata al primo addendo il secondo e viceversa; il vettore somma $\vec{R}$ risulta essere quel vettore coincidente con una diagonale del parallelogramma e avente lo stesso punto di applicazione dei due addendi.



La somma tra due vettori si può risolvere con un *metodo algebrico*:

$$\begin{cases} \vec{A} = A_x\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y + A_z\vec{u}_z \\ \vec{B} = B_x\vec{u}_x + B_y\vec{u}_y + B_z\vec{u}_z \\ \vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\,\vec{u}_x + (A_y + B_y)\,\vec{u}_y + (A_z + B_z)\,\vec{u}_z \end{cases}$$

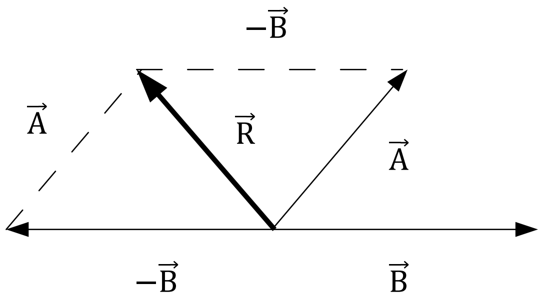
Si può dimostrare che la somma tra vettori gode delle *proprietà*:

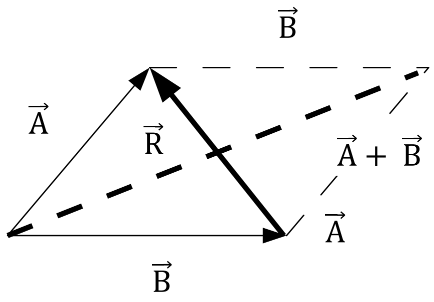
COMMUTATIVA $\qquad \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

ASSOCIATIVA $\qquad \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$

• <u>DIFFERENZA</u>

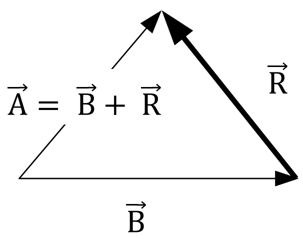
La differenza tra vettori si può risolvere con un *metodo grafico*:





① la differenza tra due vettori $\vec{A} - \vec{B}$ si può interpretare come la somma del primo con l'opposto del secondo $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$; in tal senso ricorrendo alla regola del parallelogramma la risultante $\vec{R}$ è della differenza è data dall'altra diagonale (rispetto alla somma).

② alternativamente si può notare che $\vec{A} - \vec{B}$ è quel vettore che sommato al secondo ($\vec{B}$) restituisce il primo ($\vec{A}$); in altri termini è quel vettore applicato all'estremo libero di $\vec{B}$ e che termina nella punta di $\vec{A}$.



La differenza tra due vettori di può risolvere con un *metodo algebrico*:

$$\begin{cases} \vec{A} = A_x\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y + A_z\vec{u}_z \\ \vec{B} = B_x\vec{u}_x + B_y\vec{u}_y + B_z\vec{u}_z \\ \vec{R} = \vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\,\vec{u}_x + (A_y - B_y)\,\vec{u}_y + (A_z - B_z)\,\vec{u}_z \end{cases}$$

Si può notare che la differenza tra vettori gode delle seguenti *proprietà*:

<u>NON</u> è COMMUTATIVA $\qquad \vec{A} - \vec{B} = -(\vec{B} - \vec{A})$

• <u>MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE</u>

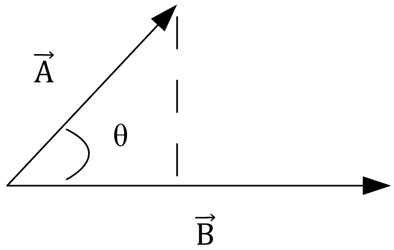
Il prodotto di un vettore $\vec{A}$ per uno scalare k > 0 è un vettore che ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{A}$ e modulo pari a $k\,|\vec{A}| = k\,A$. Se k < 0 il vettore risultante ha la stessa direzione ma verso opposto al primo.

La moltiplicazione di un vettore per uno scalare gode delle seguenti *proprietà*:

DISTRIBUTIVA $k\left(\vec{A} \pm \vec{B}\right) = k\vec{A} \pm k\vec{B}$

• <u>PRODOTTO TRA VETTORI: PRODOTTO SCALARE</u>

Il prodotto scalare tra due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ si indica con $\vec{A} \cdot \vec{B} = A\,B\,cos\theta$ (cioè è il prodotto del modulo di uno dei due vettori per la proiezione del secondo sul primo). Il risultato del prodotto scalare è una *grandezza scalare*.



Il prodotto scalare gode delle seguenti *proprietà*:

VETTORI ORTOGONALI $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

VETTORI PARALLELI $\vec{A} \cdot \vec{B} = A\,B$

VETTORI UGUALI $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$

COMMUTATIVA $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

DISTRIBUTIVA $\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \pm \vec{C}\right) = \vec{A} \cdot \vec{B} \pm \vec{A} \cdot \vec{B}$

VERSORI ASSI $\begin{cases} \vec{u}_n \cdot \vec{u}_m = 1 \,,\ n = m \\ \vec{u}_n \cdot \vec{u}_m = 0 \,,\ n \neq m \end{cases}$

Dalle proprietà appena elencate segue che, in funzione delle componenti dei singoli vettori:

$$\begin{cases} \vec{A} = A_x\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y + A_z\vec{u}_z \\ \vec{B} = B_x\vec{u}_x + B_y\vec{u}_y + B_z\vec{u}_z \\ \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x\,B_x + A_y\,B_y + A_z\,B_z \end{cases}$$

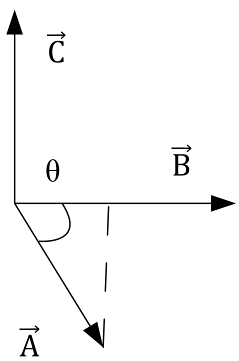
il prodotto scalare è dato dalla somma dei prodotti delle componenti corrispondenti. In particolare:

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \text{ , teorema di Pitagora}$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$$

• <u>PRODOTTO TRA VETTORI: PRODOTTO VETTORIALE</u>

Il risultato del prodotto vettoriale fra due vettori è ancora *un vettore* $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, il cui modulo è dato da $C = A\,B\,sin\,\theta$ (area del parallelogramma di lati $\vec{A}$, $\vec{B}$), la direzione è perpendicolare al piano individuato dai vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ ed il verso si ottiene con la regola della mano destra.



Il prodotto vettoriale gode delle seguenti *proprietà*:

VETTORI ORTOGONALI	$\lvert\vec{A} \times \vec{B}\rvert = A\,B$
VETTORI PARALLELI	$\vec{A} \times \vec{B} = 0$
VETTORI UGUALI	$\vec{A} \times \vec{A} = 0$
<u>NON</u> è COMMUTATIVO	$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
<u>NON</u> è ASSOCIATIVO	$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$
DISTRIBUTIVA	$\vec{A} \times (\vec{B} \pm \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} \pm \vec{A} \times \vec{B}$
VERSORI ASSI	$\begin{cases} \vec{u}_x = \vec{u}_y \times \vec{u}_z \\ \vec{u}_y = \vec{u}_z \times \vec{u}_x \\ \vec{u}_z = \vec{u}_x \times \vec{u}_y \end{cases}$

Dalle proprietà appena elencate si deduce che, in funzione delle componenti dei singoli vettori:

$$\begin{cases} \vec{A} = A_x\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y + A_z\vec{u}_z \\ \vec{B} = B_x\vec{u}_x + B_y\vec{u}_y + B_z\vec{u}_z \\ \vec{A} \times \vec{B} = (A_y\,B_z - A_z\,B_y)\,\vec{u}_x - (A_x\,B_z - A_z\,B_x)\,\vec{u}_y + (A_x\,B_y - A_y\,B_x)\,\vec{u}_z \end{cases}$$

che coincide con il determinante della matrice:

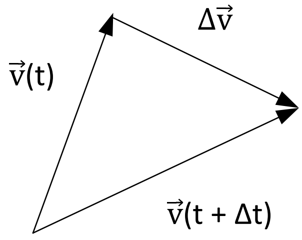
$$\begin{pmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}$$

• <u>DERIVATA DI UN VETTORE</u>

Consideriamo un vettore $\vec{v}$ funzione della variabile scalare t (cioè il cui modulo e la cui direzione cambiano al variare di t). Siano poi $\vec{v}(t)$ e $\vec{v}(t + \Delta t)$ i valori della funzione in due diversi istanti di tempo, tali che $\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t) = \Delta\vec{v}$.

Costruiamo quindi il rapporto tra la variazione $\Delta\vec{v}$ della funzione vettoriale $\vec{v}(t)$ nell'intervallo Δt e appunto l'incremento Δt:

$\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$, *rapporto incrementale*.



Si definisce derivata del vettore $\vec{v}$ rispetto alla variabile t il limite per $\Delta t \to 0$ del rapporto incrementale:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

Si vede che la derivata di un vettore è ancora un vettore ($d\vec{v}\ ^{1}/_{dt}$) con in generale direzione, modulo e verso differenti dal vettore derivato.

L'operazione di derivata di un vettore gode delle seguenti *proprietà*:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt} \\ &\frac{d}{dt}(m\,\vec{v}) = m\,\frac{d\vec{v}}{dt}\,, \qquad\qquad m = cost \end{aligned}\right\}\qquad \textit{LINEARITA'}$$

$$\frac{d}{dt}(m\,\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\,\vec{v} + m\,\frac{d\vec{v}}{dt}, \qquad m = m(t)$$

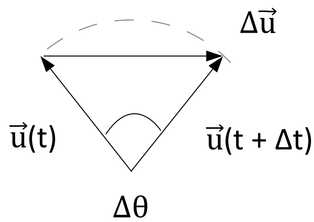
$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\cdot \vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot \vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times \vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt}\times \vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\,\vec{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\,\vec{u}_y + \frac{dv_z}{dt}\,\vec{u}_z$$

Sia ora un versore $\vec{u}(t)$. Poiché per definizione $|\vec{u}(t)| = 1$, soltanto la direzione del versore può variare con t. Supponiamo quindi che il versore ruoti di un angolo $\Delta\theta$ nell'intervallo Δt:

$$\vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t) = \Delta\vec{u}$$



con $\Delta\vec{u}$ corda che unisce gli estremi dell'arco di circonferenza descritto da $\vec{u}$ durante la rotazione $\Delta\theta$. Al limite, per $\Delta t \to 0$, $\Delta\vec{u} \to d\vec{u}$ ortogonale a $\vec{u}(t)$, con modulo:

$$|d\vec{u}| = |\vec{u}(t)|\, d\theta = d\theta$$

infatti per $\Delta t \to 0$ la corda si confonde con l'arco di circonferenza.
Complessivamente pertanto $d\vec{u} = d\theta\,\vec{u}_n$, con $\vec{u}_n$ ortogonale a $\vec{u}(t)$. La derivata del versore si definisce dunque come:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\vec{u}_n$$

La derivata di un versore è dunque un vettore con modulo in generale <u>non</u> unitario e direzione ortogonale a quella del versore derivato.

Consideriamo infine nuovamente il vettore $\vec{v}(t)$ nella forma $\vec{v}(t) = v\,\vec{u}_v$, con $\vec{u}_v$ versore parallelo a $\vec{v}(t)$ e con lo stesso verso. Poiché in generale $v = v(t)$ e $\vec{u}_v = \vec{u}_v\,(t)$, risulta:

$$\frac{d\vec{v}\,(t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_v + v\,\frac{d\vec{u}_v}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_v + v\frac{d\theta}{dt}\,\vec{u}_n$$

con $\vec{u}_n$ ortogonale a $\vec{u}_v$. Si vede che il primo termine della derivata dipende <u>solo</u> dalla variazione del modulo, mentre il secondo <u>solo</u> dalla variazione della direzione. Infine il modulo della derivata:

$$\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(v\,\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$