

PATTERN SPAZIO-TEMPORALI IN RETI DI OSCILLATORI NON LINEARI

M. Bonnin, P.P. Civalleri, F. Corinto, M. Gilli, V. Lanza

Dipartimento di Elettronica
Politecnico di Torino
C.so Duca degli Abruzzi 24, 10129 Torino

La formazione e l'evoluzione sia spaziale che temporale di pattern è stata osservata in varie discipline, quali la biologia, la chimica, l'ingegneria e la fisica. In particolare, la presenza di autoonde (autowaves) e di onde a spirale (spiral waves) è stata mostrata teoricamente e sperimentalmente in diversi sistemi biologici e chimici, (ad esempio nel muscolo cardiaco [1], nella retina, in colture di batteri e nelle reazioni di tipo Belousov-Zhabotinsky [2,3]). Tali sistemi, intesi come mezzi, sia di tipo oscillatorio che non oscillatorio, in grado di supportare pattern spazio-temporali, possono essere descritti da: (a) equazioni alle derivate parziali - modelli continui nello spazio: (b) equazioni differenziali ordinarie - modelli discreti nello spazio.

In questo ambito, l'attività di ricerca si è focalizzata sullo sviluppo di una metodologia di analisi per mezzi, in grado di supportare onde a spirale, che siano spazialmente discreti e di tipo oscillatorio. Tali mezzi sono stati descritti da reti dinamiche composte da oscillatori non lineari allocati spazialmente su strutture bidimensionali. Dal punto di vista matematico queste reti risultano essere descritte da sistemi di equazioni differenziali accoppiate del tipo:

$$L(D)x_{ij}(t) = n[x_{ij}(t)] + \varepsilon \sum_{kl \in N_{ij}} Y_{kl} x_{kl}(t). \quad (1)$$

dove si assume che: (a) gli oscillatori siano tutti uguali; (b) il singolo oscillatore non lineare, situato spazialmente nel punto specificato da due indici (i, j), ammetta un modello tipo Lur'e nella variabile scalare x_{ij} (con $n(\cdot)$ funzione non lineare); (c) le interazioni tra gli oscillatori siano descritte dai parametri Y_{kl} aventi ordine di grandezza specificato dal parametro ε .

Poiché la rete è descritta da un sistema dinamico di elevata dimensione, la dinamica globale della rete non può essere studiata né per mezzo di simulazioni numeriche nel dominio del tempo, né attraverso le classiche tecniche non lineari, che si applicano principalmente a sistemi di dimensione bassa oppure a sistemi di elevata dimensione con una dinamica non complessa.

In [4,5] è stato proposto un metodo, basato sull'applicazione congiunta del Teorema di Malkin e della tecnica della funzione descrittiva, per l'analisi della dinamica globale in reti di oscillatori debolmente connessi. Sotto l'ipotesi che ε sia piccolo, il metodo descritto in [4] consente di determinare un' approssimazione analitica delle equazioni delle deviazioni di fase, ossia le equazioni che descrivono l'influenza dell'accoppiamento sulla fase di ciascun oscillatore.

In questo lavoro è stato mostrato che l'esistenza di onde a spirale in reti di oscillatori debolmente connessi non può essere provata attraverso il metodo dato in [4] a causa della sua natura approssimata. A fine di ottenere una approssimazione più accurata delle equazioni

delle deviazioni di fase, il metodo proposto in [4] e' stato esteso sostituendo il bilanciamento armonico alla funzione descrittiva. Come conseguenza è stata derivata una semplice condizione che assicura l'esistenza di onde a spirale in reti di oscillatori debolmente connessi [6]. Tale condizione non richiede l'integrazione del sistema di equazioni differenziali ordinarie ma solo la risoluzione di due sistemi di equazioni algebriche di dimensione non elevata.

La tecnica proposta, basata quindi sul Teorema di Malkin e sul bilanciamento armonico, è stata applicata con successo ad reti bidimensionali composte da oscillatori di Chua.

[1] C. S. Henriquez, and A. Papazoglou, "Using computer models to understand the roles of tissue structure and membrane dynamics in arrhythmogenesis". *Proc. IEEE*, 84:334-354, 1996.

[2] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Springer-Verlag Berlin, 1984.

[3] J. E. Paultet and B. Ermentrout. "Stable rotating waves in a two-dimensional discrete active media", *SIAM J. Appl. Math.*, 54:1720-1744, 1994.

[4] M. Bonnin, F. Corinto, M. Gilli, "Periodic Oscillation In Weakly Connected Cellular Nonlinear Networks", *IEEE Transactions on Circuits and Systems I. Fundamental Theory and Applications*, 2008, ISSN: 1057-7122, DOI: 10.1109/TCSI.2008.916460

[5] V. Lanza F. Corinto, M. Gilli, P. P. Civalleri, "Analysis of nonlinear oscillatory network dynamics via time-varying amplitude and phase variables" *International Journal of Circuit Theory and Applications*, pp. 623-644, 2007, Vol. 35, ISSN: 0098-9886, DOI: 10.1002/cta.v35:5/6

[6] F. Corinto, V. Lanza, M. Gilli, "Spiral Waves in Bio-inspired Oscillatory Dissipative Media", *International Journal of Circuit Theory and Applications*, In stampa, ISSN: 0098-9886