

Una tecnica veloce SVD applicata all'analisi dei Resistive Wall Modes

M. Furno Palumbo¹, Y.Q. Liu², G. Rubinacci³, S. Ventre¹, F. Villone¹

¹DAEIMI, Università di Cassino, Via Di Biasio 43, 03043 Cassino (FR)

²EURATOM/UKAEA Fusion Association, Culham Science Centre, Abingdon, UK

³DIEL, Università Federico II di Napoli, Via Claudio 21, 80125, Napoli

L'evoluzione del plasma nei dispositivi toroidali per la fusione termonucleare controllata a confinamento magnetico possono essere caratterizzati dalla presenza di modi di evoluzione instabili [1]. Questi modi possono deformare il plasma sia assialsimmetricamente (tipicamente causando un movimento verticale) o elicoidalmente.

Ogni perturbazione induce correnti nelle strutture conduttrici circostanti, che tendono a contrastare l'instabilità. Questo effetto stabilizzante termina sulla scala di tempo di decadimento di queste correnti; ciò spiega il nome (Resistive Wall Modes, RWM).

E' dunque richiesto un sistema di stabilizzazione attiva. A questo scopo, è necessario un modello accurato del sistema (plasma + strutture conduttrici), che tenga conto delle tridimensionalità. Ciò può facilmente portare ad avere modelli computazionali molto onerosi dal punto di vista della memoria e dei tempi di calcolo.

In [2] abbiamo presentato il codice CarMa, in grado di rispondere a questa esigenza. In questo lavoro aggiungiamo a questo codice una tecnica "veloce" basata sulla Singular Value Decomposition (SVD) [3], che ha un costo computazionale che scala quasi linearmente con il numero delle incognite.

Usando una formulazione integrale del problema della magnetoquasistatica e delle correnti superficiali equivalenti per descrivere il plasma, otteniamo [2]:

$$\underline{\underline{L}}^* \frac{d\underline{\underline{I}}}{dt} + \underline{\underline{R}} \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{b}} \quad (1)$$

$$\underline{\underline{L}}^* = \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{S}} \underline{\underline{Q}} \quad (2)$$

$$L_{i,j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_c} \int_{V_c} \frac{\nabla \times \mathbf{N}_i(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \mathbf{N}_j(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV dV' \quad (3)$$

$$R_{i,j} = \int_{V_c} \nabla \times \mathbf{N}_i \cdot \underline{\underline{\eta}} \cdot \nabla \times \mathbf{N}_j dV \quad (4)$$

dove $\underline{\underline{b}}$ è un forzamento che dipende dalle tensioni applicate e $\underline{\underline{I}}$ è un vettore di N incognite discrete. Le matrici $\underline{\underline{S}}$ e $\underline{\underline{Q}}$ hanno dimensioni $N \times h$ and $h \times N$ con $h \ll N$ e non dipendente da N . Per trovare i modi di evoluzione instabili del sistema (1) usamo l'algoritmo "inverse iteration":

$$\left(\underline{\underline{R}} + \gamma_0 \underline{\underline{L}}^* \right) \underline{\underline{I}}_{k+1} = -\underline{\underline{L}}^* \underline{\underline{I}}_k, \quad \gamma_{k+1} = \gamma_0 + \frac{\underline{\underline{I}}_{k+1}^T \underline{\underline{I}}_k}{\underline{\underline{I}}_{k+1}^T \underline{\underline{I}}_{k+1}} \quad (5)$$

dove γ_0 è il tentativo iniziale e γ_{k+1} and $\underline{\underline{I}}_{k+1}$ sono le stime dell'autovalore ed autovettore al passo $k+1$.

Il sistema (5) è risolto usando l'algoritmo GMRES preconditionato. Di conseguenza, occorre calcolare ripetitivamente il prodotto: $\underline{\underline{L}}^* \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{L}} \underline{\underline{I}}$. Il calcolo di $\underline{\underline{R}} \underline{\underline{I}}$ non è problematico perché la matrice $\underline{\underline{R}}$ è sparsa.

Il termine $\underline{\underline{S}}\underline{\underline{Q}}\underline{\underline{I}}$ può essere facilmente calcolato con un costo computazionale che scala linearmente con N , grazie alle dimensioni delle matrici coinvolte. Viceversa, il termine $\underline{\underline{L}}\underline{\underline{I}}$ è calcolato ricorrendo ad una tecnica SVD [3].

Quest'ultima sfrutta il fatto che gran parte delle interazioni definite dalla matrice $\underline{\underline{L}}$ sono a basso rango. Per sfruttare questa circostanza, usiamo una tecnica che modifica l'approccio "adaptive multilevel" che è usato nell'ambito del Fast Multipole Methods (FMM) [4]. In particolare, sovrapponiamo alla mesh ad elementi finiti una griglia regolare fatta di celle cubiche e comprimiamo ricorsivamente la matrice $\underline{\underline{L}}$, calcolando l'approssimazione di basso rango di sue sottomatrici opportune.

La figura 1 mostra l'andamento quasi lineare dei costi computazionali con il numero di incognite, per un caso benchmark. La Fig. 2 mostra invece la geometria di interesse ITER a cui è stata applicata con successo la formulazione proposta per valutare gli effetti dei moduli del blanket.

Questo lavoro è stato supportato dal MiUR con il progetto PRIN 2006094025 e dal Consorzio CREATE.

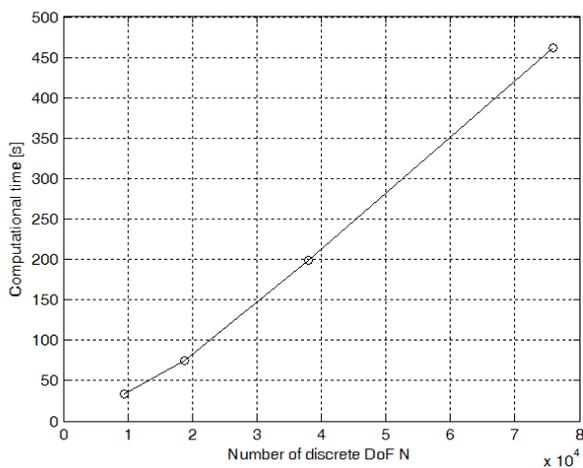


Fig. 1. Scaling of computational time

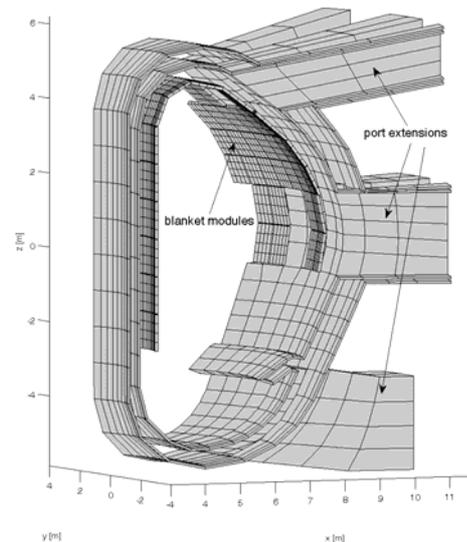


Fig. 2. Geometria di ITER.

- [1] Freidberg J P , *Ideal Magnetohydrodynamics*, Plenum Press (1985).
- [2] Albanese R, Liu Y Q, Portone A, Rubinacci G, Villone F, "Coupling Between a 3D Integral Eddy Current Formulation and a Linearized MHD Model for the Analysis of Resistive Wall Modes", *Proc. of 16th COMPUMAG Conference*, Aachen (Germany), June 2007.
- [3] A. Maffucci, G. Rubinacci, A. Tamburrino, S. Ventre and F. Villone, "Fast Low-Frequency Impedance Extraction using a Volumetric Three-Dimensional Integral Formulation", *Proceedings of ACES Conference*, Verona, Italy, March 19-23, 2007
- [4] H. Cheng, L. Greengard, and V. Rokhlin, *J. Comput. Phys.*, vol. 155, pp. 468–498, 1999.