

# METODO GENERALIZZATO DI LYAPUNOV PER IL MODELLO FULL-RANGE DELLE RETI NEURALI CELLULARI

*Mauro Di Marco, Mauro Forti, Massimo Grazzini, Luca Pancioni*

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione  
Università degli Studi di Siena  
Via Roma, 56, 53100 Siena

Sin dalla loro introduzione nel 1988 [1], le reti neurali cellulari standard (S-CNN) hanno rappresentato uno dei paradigmi più studiati per l'elaborazione dell'informazione in tempo reale. Le S-CNN possono essere impiegate in vari campi applicativi, fra cui l'elaborazione in tempo reale delle immagini, la robotica, il riconoscimento di forme e la programmazione matematica. Più in generale le CNN costituiscono un paradigma della complessità, capace di unificare un'ampia varietà di fenomeni spazio-temporali il cui unico denominatore comune è la presenza di interazioni locali di tipo non lineare in un mezzo attivo.

L'introduzione del modello '*full-range*' (FR) ha permesso di ottenere vantaggi rilevanti nell'implementazione su circuito integrato di CNN con elevato numero di neuroni: si osserva in particolare un incremento della densità di celle e la riduzione dei tempi di elaborazione e del consumo di potenza [2]. La maggior parte dei prototipi di CNN attualmente realizzati trovano nel modello FR la loro architettura di riferimento. Tra questi ricordiamo i chip CACE1k, ACE4K e ACE16K, che hanno permesso un'implementazione efficiente della *CNN Universal Machine*. Nel modello FR il sistema di autoinibizione del neurone è reso più efficiente dalla presenza di un limitatore 'hard', che impedisce alla variabile di stato di entrare profondamente in saturazione. Dato che la caratteristica I-V del limitatore 'hard' ideale presenta due segmenti verticali, esistono valori dello stato per cui il vettore velocità del modello FR non è univocamente definito, ma appartiene ad un intero intervallo di velocità ammissibili. Pertanto, da un punto di vista matematico, la dinamica delle FR-CNN è descritta attraverso un'inclusione differenziale [3], [4].

In un recente articolo di Corinto e Gilli [5] sono stati messi a confronto i comportamenti dinamici di una S-CNN e di una FR-CNN del secondo ordine caratterizzate dalla medesima famiglia di parametri (ingressi e interconnessioni). È stato in particolare mostrato che vi sono casi in cui, a parità di parametri, una S-CNN è stabile mentre la corrispondente FR-CNN presenta un ciclo limite stabile. Ciò significa che, in generale, i due tipi di modello non esibiscono comportamenti qualitativamente simili e che i risultati di stabilità validi per il modello FR non possono essere dedotti da quelli relativi al modello standard.

Abbiamo preso in esame una classe di inclusioni differenziali, chiamate *disequazioni differenziali variazionali* (DVI), che descrivono la dinamica di sistemi in cui le variabili di stato sono vincolate in una regione convessa e compatta. Quando la regione considerata è un ipercubo, le DVI includono, come caso speciale, la famiglia di inclusioni differenziali che governa le FR-CNN. L'obiettivo principale della ricerca è stato quello di sviluppare un metodo di Lyapunov generalizzato che permetta di affrontare problemi di convergenza e stabilità nell'ambito delle DVI.

Attraverso l'introduzione di un'opportuna nozione di derivata a più valori, è stato sviluppato un metodo di Lyapunov, analogo a quello per le equazioni differenziali tradizionali, che permette di valutare il comportamento di una funzione energia lungo le

traiettorie della DVI, senza doverne integrare le soluzioni [3,4,8]. Inoltre è stata dimostrata una versione estesa del *principio di invarianza di LaSalle* che garantisce la convergenza asintotica delle soluzioni della DVI all'insieme dei punti dello spazio degli stati in cui la derivata contiene il valore nullo.

Questi strumenti sono stati impiegati per ottenere condizioni sufficienti per la stabilità completa (convergenza in presenza di molteplici punti di equilibrio), la stabilità globale asintotica (GAS) ed esponenziale (GES) (convergenza in presenza di un unico punto di equilibrio) delle soluzioni delle DVI. I risultati ottenuti sono applicati al caso delle FR-CNN per provare la stabilità completa in FR-CNN con matrice di interconnessione simmetrica e la GES in FR-CNN con matrice di interconnessione di tipo LDS [8]. I criteri ottenuti sono inoltre applicati a FR-CNN di tipo più generale che modellano, ad esempio, il circuito generalizzato per la programmazione non lineare. Nel caso importante di campi vettoriali di tipo gradiente generalizzato (di Clarke), il metodo ha permesso di dimostrare la stabilità completa del sistema.

La nozione di derivata a più valori proposta in [8] ha tratto ispirazione da un'analogia nozione proposta da Shevitz e Paden [6] e successivamente riconsiderata da Bacciotti e Ceragioli [7]. La derivata a più valori proposta in [6,7] è pensata per famiglie di inclusioni differenziali molto generali e dunque può essere applicata in un ambito più vasto delle DVI. Tuttavia la generalità della definizione di tale derivata non consente di sfruttare al meglio alcune proprietà geometriche delle soluzioni delle DVI. La derivata introdotta in [8], al contrario, risulta particolarmente efficiente nell'analisi delle DVI, proprio perché costruita sfruttando tali proprietà. Ad esempio nel caso di FR-CNN con matrice di interconnessione simmetrica, mentre la nostra derivata può essere applicata con successo, quella considerata in [6], [7] non permette di provare la convergenza del sistema.

## RIFERIMENTI

- [1] L. O. Chua and L. Yang, 'Cellular neural networks: Theory,' *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 35, no. 10, pp. 1257-1272, Oct. 1988.
- [2] A. Rodriguez-Vazquez, S. Espejo, R. Dominguez-Castro, J. L. Huertas, and E. Sanchez-Sinencio, 'Current-mode techniques for the implementation of continuous- and discrete-time cellular neural networks,' *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, vol. 40, pp. 132-146, March 1993.
- [3] G. De Sandre, M. Forti, P. Nistri, and A. Premoli, 'Full-range cellular neural networks and differential variational inequalities,' Proc. 2006 IEEE Int. Symp. Circuits and Systems, Kos, Greece, May 21-24, 2006, pp. 2173-2176.
- [4] G. De Sandre, M. Forti, P. Nistri, and A. Premoli, 'Dynamical analysis of full-range cellular neural networks by exploiting differential variational inequalities,' *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 54, no. 8, pp. 1736-1749, Aug. 2007.
- [5] F. Corinto and M. Gilli, 'Comparison between the dynamic behavior of Chua-Yang and full-range cellular neural networks,' *Int. J. Circuit Theory Applicat.*, vol. 31, pp. 423-441, Sept./Oct. 2003.
- [6] D. Shevitz and B. Paden, 'Lyapunov stability theory of nonsmooth systems,' *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, pp. 1910-1914, Sept. 1994.
- [7] A. Bacciotti and F. Ceragioli, 'Stability and stabilization of discontinuous systems and nonsmooth Lyapunov functions,' *Esaim-COCV*, vol. 4, pp. 361-376, 1999.
- [8] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, P. Nistri, and L. Pancioni, 'Lyapunov Method and Convergence of the Full-Range Model of CNNs', in corso di stampa su *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 2008.