

METODI DI ANALISI PER CIRCUITI NON-LINEARI CHE MODELLANO RETI NEURALI ARTIFICIALI

Mauro Di Marco, Mauro Forti, Massimo Grazzini, Luca Pancioni

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione
Università degli Studi di Siena
Via Roma 56, 53100 Siena

L'attività di ricerca dell'Unità di Siena è stata dedicata prevalentemente allo studio delle dinamiche non lineari di circuiti che modellano reti neurali artificiali. I temi di ricerca principali sono stati i seguenti: 1) nuovi metodi per la stabilità completa (convergenza) di circuiti non-lineari e “non-smooth”; 2) robustezza della stabilità completa in reti neurali di tipo cellulare; 3) reti neurali per la soluzione di problemi di ottimizzazione non-lineare e “non-smooth”.

1) Nuovi metodi per la stabilità completa di circuiti non-lineari e “non-smooth”

La proprietà di convergenza delle reti neurali verso un punto di equilibrio è di fondamentale importanza in vista di molte applicazioni pratiche. Tale proprietà viene solitamente studiata con metodi alla Lyapunov, che richiedono l'esistenza di una funzione energia (e quindi la simmetria della matrice di interconnessione) e il fatto che i punti di equilibrio siano isolati.

Nel lavoro [1] è stato proposto un nuovo metodo di analisi della stabilità completa di reti neurali cellulari che abbiano una dinamica descritta da un sistema a gradiente rispetto a una funzione di energia “analitica a tratti”. Il principale risultato consiste nel fatto che per tali reti la convergenza è sempre di tipo esponenziale, anche quando i punti di equilibrio sono non isolati. Tali risultati sono stati estesi nel lavoro [14] alla classe delle reti di Cohen-Grossberg.

I lavori [11, 12] presentano un approccio geometrico per lo studio di convergenza delle CNN competitive che sfrutta il concetto di schema decisionale originariamente proposto da Grossberg. Il metodo ottenuto risulta particolarmente interessante, in quanto non richiede l'esistenza di una funzione di Lyapunov e dunque può essere applicato anche al caso di CNN con matrice di interconnessione non simmetrica.

I lavori [3-5, 13] estendono risultati di convergenza, di stabilità asintotica ed esponenziale globale a modelli di circuiti non lineari che abbiano funzioni di attivazione discontinue o a più valori, come le reti CNN Full-Range. Utilizzando le metodologie dell'analisi multivoca, è stato possibile ricavare criteri di applicabilità generale.

2) Robustezza della stabilità completa in reti neurali di tipo cellulare

L'Unità di Siena ha proseguito lo studio sulla robustezza della stabilità completa di CNN affette da piccole perturbazioni dissimmetrizzanti della matrice di interconnessione. Nei lavori [6, 8] è stata analizzata una classe di reti cellulari circolari. Per tale classe è stato mostrato che la stabilità completa non è necessariamente robusta. Infatti, esistono perturbazioni (piccole rispetto al valore nominale delle interconnessioni) che, pur conservando la struttura della rete, provocano la cancellazione di tutti i punti di equilibrio asintoticamente stabili e quindi la perdita della stabilità completa.

Nel lavoro [9] è stato dimostrato che la robustezza della stabilità completa è una proprietà generica (ovvero l'insieme di reti simmetriche che non sono convergenti in modo robusto è di misura nulla) per una classe di CNN del terzo ordine affette da una perturbazione dissimmetrizzante dipendente da due parametri. La tecnica utilizzata nella prova sfrutta sia metodi alla Lyapunov che l'analisi geometrica del campo vettoriale che descrive la dinamica

della rete neurale, e permette di stimare il margine di robustezza della stabilità completa per ogni rete simmetrica appartenente alla classe.

3) Reti neurali per la soluzione di problemi di ottimizzazione non-lineare e “non-smooth”

Nei lavori [2,7,10] sono state studiate le proprietà di convergenza di reti neurali per la soluzione in tempo reale di problemi di programmazione lineare e quadratica. Tali reti utilizzano non-linearità discontinue (tipo diodo ideale). Impiegando una versione “non-smooth” della disuguaglianza di Lojasiewicz, è stata dimostrato che la convergenza verso la soluzione ottima avviene o in tempo finito o in modo esponenziale. In [2], in relazione al caso della programmazione lineare, è stata mostrato che per tali circuiti la convergenza è una proprietà robusta, ricavando un criterio per valutare il margine di robustezza.

Bibliografia

- [1] M. Forti, A. Tesi, “The Lojasiewicz exponent at an equilibrium point of a standard CNN is $1/2$,” *Int. J. Bifurcation Chaos*, vol. 16, n. 8, pp. 2191-2205, Aug. 2006.
- [2] M. Di Marco, Mauro Forti, M. Grazzini, “Robustness of convergence in finite time for linear programming neural networks,” *Int. J. Circuit Theory Applicat.*, vol. 34, n. 3, pp. 307-316, 2006.
- [3] M. Forti, M. Grazzini, P. Nistri, L. Pancioni, “Generalized Lyapunov approach for convergence of neural networks with discontinuous or non-Lipschitz activations,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 214, n. 1, pp. 88-99, February 2006.
- [4] M. Forti, M. Grazzini, P. Nistri, L. Pancioni, “A result on convergence in finite time for nonsmooth neural networks,” *Proc. 2006 IEEE Int. Symp. Circuits and Systems*, Kos, Greece, May 21-24, 2006.
- [5] M. Forti, “M-matrices and global convergence of discontinuous neural networks,” *Int. J. Circuit Theory Applicat.*, vol. 35, no. 2, pp. 105-130, March/April 2007.
- [6] M. Di Marco, C. Ghilardi, “Robustness of complete stability for 1-D circular CNNs,” *Int. J. Bifurcation Chaos*, vol. 16, n. 8, pp. 2177-2190, August 2006.
- [7] M. Forti, P. Nistri, M. Quincampoix, “Convergence of Neural Networks for Programming Problems Via a Nonsmooth Lojasiewicz Inequality,” *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 17, n. 6, 1471-1486, November 2006.
- [8] M. Di Marco, M. Forti, A. Tesi, “Robustness of Complete Stability for a Class of Nearly-Symmetric Cellular Neural Networks,” *Proc. 2006 IEEE International Symposium on Intelligent Control (ISIC)*, October 4-6, 2006, Munich, Germany, pp. 1596-1601.
- [9] M. Di Marco, M. Forti, A. Tesi, “On the margin of complete stability for a class of cellular neural networks,” accettato per la pubblicazione su: *Int. J. Bifurcation Chaos*.
- [10] M. Forti, S. Manetti, P. Nistri, “Neural networks for non-smooth constrained optimization problems,” *Proc. 9th Workshop on Optimization and Inverse Problems in Electromagnetism (OIPE2006)*, September 13-15, 2006, Sorrento, pp. 121-122.
- [11] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, P. Nistri, L. Pancioni, “A study on convergence of competitive CNNs,” *Proc. of 2007 IEEE Int. Symp. Circuits and Systems*, New Orleans, USA, 27-30 May 2007.
- [12] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, P. Nistri, L. Pancioni, “Global consistency of decisions and convergence of competitive cellular neural networks,” *Int. J. Bifurcation Chaos*, vol. 17, n. 9, pp. 3127-3150, September 2007.
- [13] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, L. Pancioni, “On global exponential stability of standard and full-range CNNs,” *Int. J. Circuit Theory Applicat.*, DOI:10.1002/cta.451.
- [14] M. Forti, “Convergence of a subclass of Cohen-Grossberg neural networks via the Lojasiewicz inequality,” *IEEE Trans. Syst. Man Cybernetics B*, vol. 38, n.1 pp. 252-257, February 2008.