PRECONDIZIONAMENTO DELL'EQUAZIONE VETTORIALE DI HELMHOLTZ DISCRETA PER MEZZO DELLO SPOSTAMENTO DEGLI AUTOVALORI

G. Borzì

Dipartimento di Ingegneria Civile, Università di Messina

Per risolvere i sistemi algebrici lineari prodotti dalla discretizzazione numerica di equazioni alle derivate parziali si fa comunemente uso di risolutori iterativi. I metodi iterativi più usati per risolvere i sistemi algebrici lineari prodotti mediante la discretizzazione ad elementi finiti sono i metodi iterativi non stazionari. Tali metodi si basano sull'algoritmo di Lanczos o di Arnoldi e pertanto sono noti come metodi Lanczos-based. La loro convergenza dipende molto pesantemente dalla distribuzione degli autovalori della matrice dei coefficienti del sistema. Allo scopo di accelerarne la convergenza si fa uso di precondizionatori, i quali consistono generalmente in matrici che vengono moltiplicate con la matrice dei coefficienti per ottenere dei sistemi equivalenti impliciti nei quali la distribuzione degli autovalori è più favorevole alla convergenza rispetto al sistema originario. Nel caso di matrici indefinite, risultati teorici e sperimentali mostrano che i metodi di Lanczos sono tanto più efficaci quanto più è soddisfatta la cosiddetta condizione del semipiano. Tale condizione prescrive che la maggior parte degli autovalori del sistema siano strettamente contenuti in un semipiano individuato da una retta passante per l'origine.

Nel caso dell'equazione discreta vettoriale di Helmholtz tempo-armonica a frequenza *f* in un dominio *D* la condizione del semipiano è fortemente violata. Infatti la matrice dei coefficienti è

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} - \mathrm{k}_0^2 \mathbf{B} \tag{1}$$

dove **A** deriva dalla discretizzazione dell'operatore $\nabla \times \nabla \times \vec{\mathrm{E}}$ in *D*, **B** è la matrice metrica e k_0 è il numero d'onda alla frequenza del problema. Poiché **A** ha un kernel non banale, generato dalle combinazioni lineari delle funzioni di forma di tipo edge che rappresentano i gradienti delle funzioni di forma nodali, la matrice (1) ha tanti autovalori negativi quanti sono i nodi del reticolo usato nella discretizzazione, più il numero di eventuali modi risonanti al di sotto della frequenza del problema.

Gli autovalori negativi della matrice (1) relativi al kernel di **A** possono essere traslati dal semiasse negativo al semiasse positivo usando i coefficienti delle combinazioni lineari delle funzioni di forma di tipo edge che rappresentano i gradienti delle funzioni di forma nodali. Sia **P** la matrice le cui colonne contengono tali coefficienti, ovvero tali che

$$\nabla \mathrm{v}_j = \sum \mathrm{p}_{ij} \vec{\mathrm{N}}_i \tag{2}$$

dove v_j è la j-esima funzione di forma nodale e $\vec{\mathrm{N}}_i$ è la i-esima funzione di forma di tipo edge, e si costruisca la matrice ausiliaria

$$\mathbf{S}_a = \mathbf{S} + \mathbf{SPRP}^t\mathbf{S} \tag{3}$$

dove **R** è una matrice quadrata di ordine pari al numero delle colonne di **P**. Si può dimostrare che scegliendo **R** in modo tale che l'autovalore minimo λ_1 del problema agli autovalori generalizzati

$$\mathbf{A}_\mathrm{n}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{R}^{-1}\mathbf{w} \tag{4}$$

risulti maggiore di k_0^{-2}, la matrice definita in (3) ha tanti autovalori negativi quante sono gli eventuali modi risonanti al di sotto della frequenza f, ovvero è molto più vicina alla condizione del semipiano della matrice originaria **S**. In (4) $\mathbf{A}_\mathrm{n}$ è la matrice ad elementi finiti nodali per il problema elettrostatico nel dominio *D*. Si noti che le colonne di **P** formano una base per le soluzioni elettrostatiche nel dominio *D*, pertanto se la soluzione del problema non include componenti relativi a tali soluzioni la matrice $\mathbf{S}_\mathrm{a}$ può sostituire la matrice originaria **S** nel sistema algebrico lineare senza alterarne la soluzione.

La matrice **R** che distribuisce gli autovalori traslati in modo ottimale è data da

$$\mathbf{R} = s\mathbf{A}_\mathrm{n}^{-1} \tag{5}$$

dove s è uno scalare positivo scelto in modo tale che $\lambda_1 > k_0^{-2}$ e che gli autovalori traslati siano compresi tra il massimo e minimo autovalore positivo di **S**.

Essendo l'inversione della matrice $\mathbf{A}_\mathrm{n}$ eccessivamente onerosa non è possibile utilizzare una matrice **R** come nella (5). Però è possibile usare una approssimazione dell'inversa di $\mathbf{A}_\mathrm{n}$ opportunamente scalata. L'inversa approssimata è costruita usando un precondizionatore tradizionale per $\mathbf{A}_\mathrm{n}$, quale lo scaling diagonale dove l'inversa è approssimata dall'inversa della diagonale della matrice originari, l'ILU (Incomplete LU) ed il SSOR (Symmetric Successive Over Relaxation). Lo scaling diagonale è computazionalmente meno oneroso degli altri due metodi ma fornisce approssimazioni peggiori. Esperimenti numerici hanno mostrato che il miglior compromesso tra qualità dell'approssimazione ed efficienza computazionale è raggiunto con lo scaling diagonale.

Il metodo proposto è stato confrontato con i metodi tradizionali su alcuni problemi ad alta frequenza. I risultati hanno mostrato che il numero di iterazioni necessarie per ottenere la soluzione viene dimezzato con l'uso dello spostamento degli autovalori rispetto ai precondizionatori tradizionali. Il tempo di calcolo complessivo viene ridotto di un terzo e non dimezzato poiché il tempo di calcolo per un prodotto matrice vettore con la matrice (3) è superiore del 50% rispetto al corrispondente tempo per la matrice originaria.

Si noti che a differenza dei metodi di precondizionamento tradizionali, il metodo proposto non è basato sul prodotto della matrice del sistema con un'altra matrice, ma sulla somma della matrice originaria con un'altra matrice. Come nel precondizionamento tradizionale, la matrice precondizionata non viene esplicitamente assemblata ma lasciata in forma di prodotto e somma.

Riferimenti

[1] G. Borzì, “Computing cavity resonances using eigenvalues displacement,” *IEEE Transactions Microwave Theory Techniques*, vol. 52, no. 1, pp. 69–75, gennaio 2004.
[2] G. Borzì, “Solution of the finite element vector Helmholtz equation by means of eigenvalue displacement,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 54, n. 6, pp. 1758-1765, giugno 2006.