UNA FAMIGLI DI ELEMENTI DI CONTORNO NON CONVENZIONALI PER IL FEM-BEM

S. Alfonzetti, N. Salerno

Dipartimento di Ingegneria Elettrica, Elettronica e dei Sistemi, Università di Catania

Il metodo ibrido FEM-BEM è indubbiamente il più diffuso metodo per la risoluzione di problemi di elettromagnetismo statico e quasi statico posti in domini illimitati. Allo scopo di accoppiare i due metodi FEM e BEM, i due reticoli devono essere scelti convenientemente. Un modo convenzionale di fare ciò è l'adozione di elementi di contorno che siano la restrizione degli elementi finiti sul contorno di troncamento. Questo implica che sia il campo scalare, diciamo v, sia la sua derivata normale, diciamo q, siano sviluppate usando gli stessi nodi e le stese funzioni di forma polinomiali, non tenendo conto che q potrebbe essere meglio descritta da funzioni di forma polinomiali di grado inferiore. Inoltre, l'implementazione del BEM convenzionale comporta notevoli difficoltà per gestire contorni con punti angolosi, poiché in essi la derivata normale q ha più valori.

Per evitare questi svantaggi si propone una famiglia di elementi simpliciali di contorno non convenzionali, in cui i nodi della variabile v sono posti nelle posizioni canoniche, mentre i nodi della variabile q sono posti internamente all'elemento come mostrato in Fig. 1 per segmenti e triangoli di primo, secondo e terzo ordine. Si noti che tale scelta consente di distribuire uniformemente i nodi q all'interno dell'elemento.

In un elemento di contorno le variabili v e q sono approssimate come:

$$v = \sum_n v_n \alpha_n \qquad\qquad q = \sum_m q_m \beta_m \tag{1}$$

dove v_n e q_m sono i valori nodali di v e q, ed α_n e β_m sono le relative funzioni di forma. Si noti che se υ è il grado delle funzioni polinomiali α_n, $\upsilon-1$ è quello delle β_m, in congruenza con il fatto che q è la derivata di v. Le funzioni di forma α_n sono quelle convenzionali, mentre le funzioni di forma β_m sono riportate in tabella I, dove ξ ed η indicano le coordinate locali.

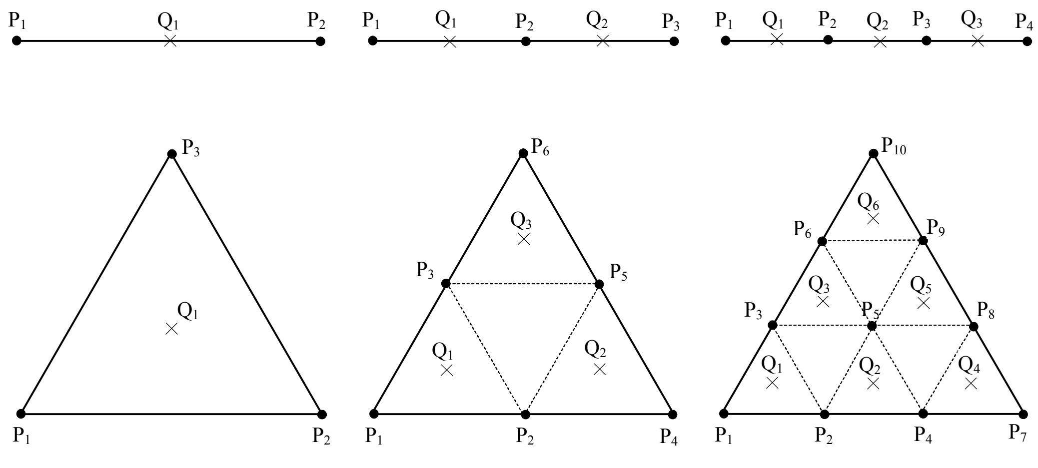

Fig. 1 . Elementi di contorno di primo, secondo e terzo ordine. Il simbolo • denota i nodi P_n del campo scalare v, mentre il simbolo × denota i nodi Q_m della derivata normale q.

TABELLA I

elemento	ordine υ	β_1	β_2	β_3
segmento	1	1	–	–
segmento	2	$(3-4\xi)/2$	$(-1+4\xi)/2$	–
segmento	3	$(36\xi^2-48\xi+15)/8$	$(36\xi^2+36\xi-3)/5$	$(36\xi^2-24\xi+3)/8$
triangolo	1	1	–	–
triangolo	2	$(-6\xi-6\eta+5)/3$	$(6\xi-1)/3$	$(6\eta-1)/3$

TABELLA II

ordine υ	coefficienti g_{mj}
1	$g_{11}^{(k)} = \frac{L_k}{2\pi}\left[1+\ln\left(\frac{2}{L_k}\right)\right]$
2	$g_{11}^{(k)} = g_{22}^{(k)} = \frac{L_k}{4\pi}\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{8}\ln(3)+\ln\left(\frac{4}{L_k}\right)\right]$ $\quad g_{12}^{(k)} = g_{21}^{(k)} = \frac{L_k}{4\pi}\left[\frac{1}{2}-\frac{9}{8}\ln(3)+\ln\left(\frac{4}{L_k}\right)\right]$
3	$g_{11}^{(k)} = g_{33}^{(k)} = \frac{L_k}{2\pi}\left[\frac{13}{24}-\frac{5}{36}\ln(5)+\frac{3}{8}\ln\left(\frac{6}{L_k}\right)\right]$ $\quad g_{22}^{(k)} = \frac{L_k}{2\pi}\left[\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{2}{L_k}\right)\right]$ $\quad g_{21}^{(k)} = g_{23}^{(k)} = \frac{L_k}{2\pi}\left[\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\ln\left(\frac{2}{L_k}\right)\right]$ $g_{12}^{(k)} = g_{32}^{(k)} = \frac{L_k}{2\pi}\left[\frac{5}{12}-\frac{25}{72}\ln(5)+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{6}{L_k}\right)\right]$ $\quad g_{13}^{(k)} = g_{31}^{(k)} = \frac{L_k}{2\pi}\left[\frac{1}{24}-\frac{25}{72}\ln(5)+\frac{3}{8}\ln\left(\frac{6}{L_k}\right)\right]$

Per la scrittura delle equazioni FEM in problemi bidimensionali, devono essere calcolati integrali del tipo seguente:

$$c_{mn} = \int_{S_k} \alpha_n \beta_m \, ds = L_k \int_0^1 \alpha_n \beta_m \, d\xi = L_k t_{mn} \qquad (2)$$

dove S_k è il generico elemento di contorno k-esimo, L_k è la sua lunghezza, e i coefficienti t_{mn} sono gli elementi delle seguenti matrici universali:

$$\mathbf{T}_1^{(2)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_2^{(2)} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_3^{(2)} = \frac{1}{320}\begin{bmatrix} 55 & 81 & -27 & 11 \\ -26 & 66 & 66 & -26 \\ 11 & -27 & 81 & 55 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Per problemi tridimensionali le relative matrici universali sono riportate in [1].

Le equazioni BEM sono scritte usando i nodi Q_m come poli della funzione di Green $G(P,Q)$, allora i seguenti integrali devono essere calcolati:

$$h_{mn}^{(k)} = \int_{S_k} \alpha_n(P) \frac{\partial G(P, Q_m)}{\partial n} ds \qquad g_{mj}^{(k)} = \int_{S_k} \beta_j(P)\, G(P, Q_m)\, ds \qquad (4)$$

Se il nodo Q_m non appartiene ad S_k le funzioni integrande sono regolari e per la valutazione di tali integrali può essere usata l'integrazione numerica di Gauss. Se, al contrario, Q_m appartiene ad S_k; i coefficienti h_{mn} si annullano, mentre i coefficienti g_{mj} si calcolano mediante le formule analitiche riportate in tabella II. Per problemi tridimensionali valgono considerazioni simili; in particolare per il calcolo dei coefficienti g_{mj} l'elemento di contorno triangolare è suddiviso in tre sottotriangoli aventi il nodo Q_m come vertice [1].

Riferimenti

[1] S. Alfonzetti, N. Salerno, "A Non-Standard Family of Boundary Elements for the Hybrid FEM-BEM Method" *Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC)*, Atene (Grecia), 11-15 maggio 2008.