

SOLUZIONE DI SISTEMI ALGEBRICI IBRIDI DI TIPO FEM-BEM MEDIANTE GMRES

G. Aiello¹, S. Alfonzetti¹, G. Borzi², E. Dilettoso¹, N. Salerno¹

(1) Dipartimento di Ingegneria Elettrica, Elettronica e dei Sistemi, Università di Catania

(2) Dipartimento di Ingegneria Civile, Università di Messina

Si consideri un problema elettrostatico in cui conduttori, con potenziali assegnati, siano immersi in un mezzo omogeneo illimitato, in presenza di eventuali disomogeneità localizzate e cariche distribuite e concentrate. Introdotto un contorno fittizio Γ_F di troncamento, che include tutto il sistema (ad eccezione di eventuali cariche concentrate) come in Fig. 1, il calcolo del campo elettrostatico all'interno del dominio D delimitato da Γ_F può essere affrontato mediante il metodo ibrido FEM-BEM:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla v) = -\rho \quad \text{in } D \quad (1)$$

$$v = V_k \quad \text{sui conduttori} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} v(Q) + \int_{\Gamma_F} v(P) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_F} q(P) G(P, Q) d\Gamma + v_{\text{ext}}(Q) \quad P, Q \in \Gamma_F \quad (3)$$

dove v è il potenziale elettrico, $q = \varepsilon_r \partial v / \partial n$ è la sua derivata normale su Γ_F e $G = 1/4\pi r$ è la funzione di Green dello spazio libero. Discretizzato il dominio D mediante elementi finiti tetraedrali, le equazioni precedenti sono poste in forma numerica [1] come segue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{A}_F \\ \mathbf{A}_F^t & \mathbf{A}_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_{F0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} [\mathbf{q}_F] \quad (4)$$

$$\mathbf{H} \mathbf{v}_F = \mathbf{G} \mathbf{q}_F + \mathbf{v}_{\text{est}} \quad (5)$$

dove: $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}_F$ sono i vettori dei valori del potenziale v , rispettivamente nei nodi interni al dominio e nei nodi sul contorno fittizio, $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_F$ ed $\mathbf{A}_{FF}$ sono matrici sparse di coefficienti geometrici, $\mathbf{b}_0$ e $\mathbf{b}_{F0}$ costituiscono il termine noto dipendente dai potenziali dei conduttori, $\mathbf{C}$ è una matrice rettangolare sparsa, $\mathbf{q}_F$ è il vettore dei valori nodali di q , $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ sono matrici dense, $\mathbf{v}_{\text{est}}$ è il vettore dei valori nodali del potenziale dovuto alle sorgenti esterne a Γ_F . Si noti che scegliendo i nodi di q come in [2], la matrice $\mathbf{G}$ è quadrata per costruzione.

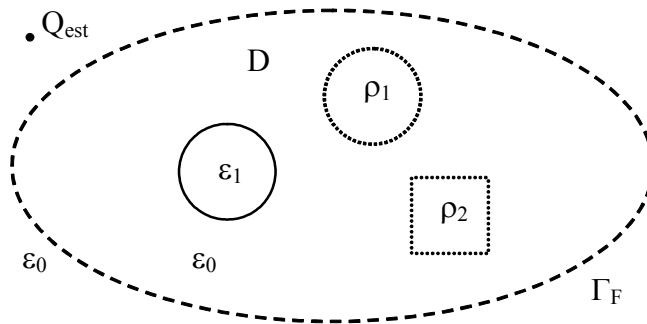


Fig. 1 – Sistema elettrostatico, racchiuso dal contorno di troncamento Γ_F .

Un approccio molto usato per la risoluzione del sistema (4)-(5) è quello basato su solutori del tipo gradiente coniugato, nei quali l'operazione base in ogni passo è il prodotto della matrice dei coefficienti del sistema per un vettore colonna. Tale approccio risulta molto oneroso a causa della natura delle matrici $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ del BEM, che, essendo dense, richiedono un elevato tempo di calcolo del prodotto matrice-vettore. Dello stesso problema soffre un altro approccio basato sulla derivazione di $\mathbf{q}_F$ dalla (5) (con conseguente inversione della matrice $\mathbf{G}$) e sua sostituzione nella (4).

In questa memoria è presentata una tecnica di risoluzione molto efficiente, basata sull'uso del GMRES per la soluzione del sistema ridotto:

$$\mathbf{M} \mathbf{q}_F = \mathbf{p} \quad (6)$$

dove la matrice $\mathbf{M}$ ed il vettore $\mathbf{p}$ sono formalmente definiti come

$$\mathbf{M} = \mathbf{G} - \mathbf{H}(\mathbf{A}_F^t \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_F - \mathbf{A}_{FF})^{-1} \mathbf{C} \quad \mathbf{p} = \mathbf{H}(\mathbf{A}_F^t \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_F - \mathbf{A}_{FF})^{-1} (\mathbf{A}_F^t \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_{F0}) + \mathbf{v}_{est} \quad (7)$$

La matrice $\mathbf{M}$ ed il vettore $\mathbf{p}$ non sono direttamente disponibili; tuttavia, il vettore $\mathbf{p}$ può essere costruito come segue: 1) si assuma $\mathbf{q}_F = \mathbf{0}$; 2) si risolva il sistema FEM (4) mediante il gradiente coniugato (CG) per ottenere $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}_F$; 3) si calcoli $\mathbf{p} = \mathbf{H} \mathbf{A}_F + \mathbf{v}_{est}$.

Similmente, la matrice $\mathbf{M}$ può essere usata per effettuare prodotti matrice-vettore $\mathbf{M} \mathbf{q}_F$ come segue: 1) dato il vettore $\mathbf{q}_F$; 2) si risolva (4) mediante CG con $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b}_{F0} = \mathbf{0}$ per ottenere $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}_F$; 3) si calcoli $\mathbf{M} \mathbf{q}_F = \mathbf{G} \mathbf{q}_F - \mathbf{H} \mathbf{v}_F$.

Per la risoluzione di (6) possono essere utilizzati diversi solutori per matrici non simmetriche del tipo gradiente coniugato, quali BiCG (BiConjugate Gradient), QMR (Quasi Minimal Residual), CGS (Conjugate Gradient Squared), BiCGstab (BiCG stabilized) ed il GMRES (Generalized Minimal Residual). Considerando che in questo contesto il prodotto matrice-vettore è molto costoso da un punto di vista computazionale, il più conveniente fra questi solutori è certamente il GMRES. In fatti il GMRES realizza una vera minimizzazione del residuo e quindi reduce al minimo il numero di iterazioni. Si noti che il maggiore svantaggio del GMRES, che in generale è dato dagli onerosi tempo di calcolo ed occupazione di memoria della base ortonormale (che incrementano linearmente con il numero di iterazioni), in questa particolare applicazione non è rilevante perché il GMRES opera sul sistema ridotto (6), il cui numero di incognite è dato dal numero di nodi della variabile q su Γ_F . Applicando questo metodo, si è sempre constatata una convergenza piuttosto rapida: in genere da 5 a 20 iterazioni GMRES sono sufficienti per ottenere la soluzione.

Riferimenti

- [1] G. Aiello, S. Alfonzetti, G. Borzì, E. Dilettoso, N. Salerno, "Solution of Linear FEM-BEM Systems for Electrostatic Field Problems by means of GMRES", *International Symposium on Electric and Magnetic Fields (EMF)*, Aussois (Francia), 19-22 giugno 2006.
- [2] S. Alfonzetti, N. Salerno, "A Non-Standard Family of Boundary Elements for the Hybrid FEM-BEM Method" *Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC)*, Atene (Grecia), 11-15 maggio 2008.