

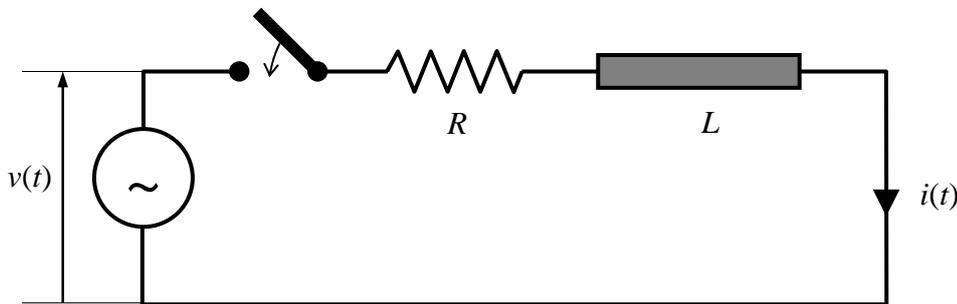
## Sovracorrenti nei trasformatori

Esaminiamo in questi appunti, in modo semplificato, l'origine e le conseguenze delle sovracorrenti che possono sollecitare l'avvolgimento di un trasformatore durante un corto circuito ai morsetti del secondario.

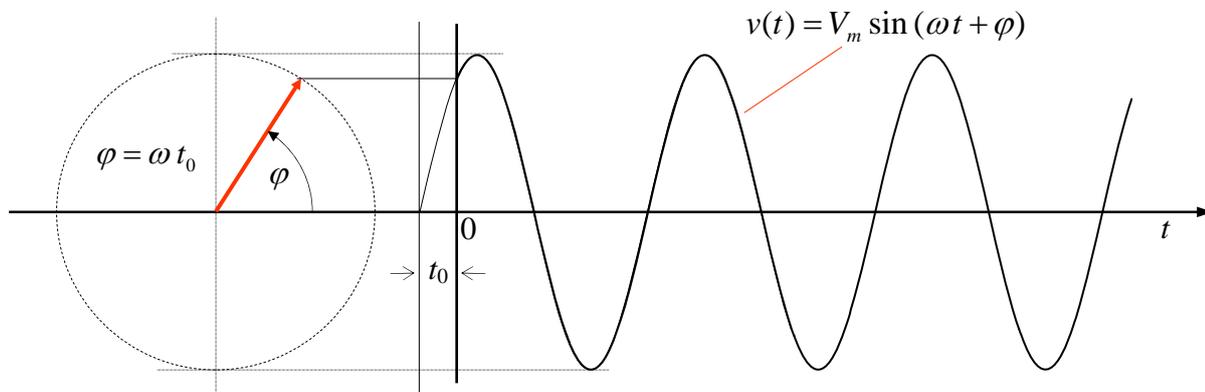
### 1 - Corto circuito in un trasformatore

#### 1.1 – Transitorio di corto circuito

Consideriamo il circuito equivalente di una fase di un trasformatore; riportando tutto al secondario e trascurando le correnti a vuoto si ottiene il circuito seguente:



Dove  $R$  e  $L$  sono la resistenza e l'induttanza ricavate dalle misure della prova in corto circuito. La tensione  $v(t)$  è sinusoidale e la chiusura dell'interruttore all'istante  $t = 0$  definisce l'inizio del transitorio che vogliamo determinare; supponiamo che all'istante  $t = 0$  la tensione  $v(t)$  assuma un andamento  $v(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi)$ , con  $\varphi = \omega t_0$ :



La corrente  $i(t)$  che percorre l'avvolgimento del trasformatore durante il transitorio è definita dalla seguente equazione:

$$1.1 \quad \boxed{L \frac{di}{dt} + Ri = V_m \sin(\omega t + \varphi)}$$

L'omogenea associata a questa equazione differenziale è data da  $L \frac{di}{dt} + Ri = 0$ , ed ha come soluzione:

$$\boxed{i_0(t) = C e^{-t/\tau}} \quad \text{dove la costante di tempo è: } \tau = \frac{L}{R} \quad \rightarrow \quad i_0(t) = C e^{-\frac{R}{L}t}$$

L'integrale generale è quindi dato da  $i(t) = i_0(t) + i_p$  dove  $i_p$  è un integrale particolare della 1.1). Per determinare questo integrale particolare poniamo:

$$i_p = A \cos(\omega t + \varphi) + B \sin(\omega t + \varphi)$$

dove  $A$  e  $B$  sono delle costanti. Derivando si ottiene:

$$\frac{di_p}{dt} = i'_p = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) + B\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

per cui dall'equazione 1.1, che può essere scritta:

$$L \frac{di_p}{dt} + R i_p = V_m \sin(\omega t + \varphi)$$

si ha:

$$L \cdot [-A\omega \sin(\omega t + \varphi) + B\omega \cos(\omega t + \varphi)] + R[A \cos(\omega t + \varphi) + B \sin(\omega t + \varphi)] = V_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$(BR - AL\omega) \sin(\omega t + \varphi) + (BL\omega + RA) \cos(\omega t + \varphi) = V_m \sin(\omega t + \varphi)$$

eguagliando i coefficienti dei termini simili si ottengono le due equazioni:

$$\begin{cases} BL\omega + RA = 0 \\ BR - AL\omega = V_m \end{cases}$$

che permettono di determinare i due coefficienti incogniti:

$$A = -\frac{BL\omega}{R} ; BR + \frac{BL\omega}{R} L\omega = V_m ; BR + B \frac{L^2 \omega^2}{R} = V_m ; B(R^2 + \omega^2 L^2) = RV_m \rightarrow B = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$A = -\frac{BL\omega}{R} = -\frac{L\omega}{R} \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \rightarrow A = -\frac{\omega LV_m}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

L'integrale particolare che soddisfa l'equazione 1.1 risulta quindi:

$$i_p = -\frac{\omega LV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$i_p = V_m \left[ -\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin(\omega t + \varphi) \right]$$

$$i_p = V_m [p \cos(\omega t + \varphi) + q \sin(\omega t + \varphi)]$$

dove:

$$p = \frac{-\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} ; q = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Poiché fra le funzioni circolari esiste la relazione:

$$p \cos \alpha + q \sin \alpha = r \sin(\alpha + \beta^*), \quad \text{con } r = \sqrt{p^2 + q^2} \quad ; \quad \beta^* = \arctan \frac{p}{q}$$

(analoga alla relazione:  $\sin \beta^* \cos \alpha + \cos \beta^* \sin \alpha = \sin(\alpha + \beta^*)$  )

possiamo scrivere:

$$p^2 + q^2 = \frac{\omega^2 L^2 + R^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} = \frac{1}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad ; \quad r = \sqrt{p^2 + q^2} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$\beta^* = \arctan \frac{-\omega L}{R} = -\arctan \frac{\omega L}{R} \quad \rightarrow \quad -\beta^* = \arctan \frac{\omega L}{R}$$

$$\beta^* = -\arctan \frac{\omega L}{R} \quad \rightarrow \quad \beta = \arctan \frac{\omega L}{R} = -\beta^*$$

L'integrale particolare cercato assume quindi la forma:

$$i_p = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \varphi - \beta)$$

Gli elementi  $R$  ed  $X = \omega L$  sono i componenti dell'impedenza di corto circuito:  $\bar{Z}_{cc} = R + j\omega L$  ; quindi si ha  $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = |\bar{Z}_{cc}| = Z_{cc}$  (modulo dell'impedenza di corto circuito). In definitiva possiamo scrivere:

$$i_p = \frac{V_m}{Z_{cc}} \sin(\omega t + \varphi - \beta)$$

L'integrale generale dell'equazione 1.1 , dato da  $i(t) = i_0(t) + i_p$  , risulta

$$i(t) = C e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_m}{Z_{cc}} \sin(\omega t + \varphi - \beta)$$

A questo punto dobbiamo soltanto determinare la costante di integrazione  $C$  basandoci sulle condizioni iniziali:

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad i(0) = 0 \quad (\text{caso più semplice})$$

Si ha:

$$C + \frac{V_m}{Z_{cc}} \sin(\varphi - \beta) = 0 \quad ; \quad C = -\frac{V_m}{Z_{cc}} \sin(\varphi - \beta)$$

La soluzione generale dell'equazione 1.1 è quindi:

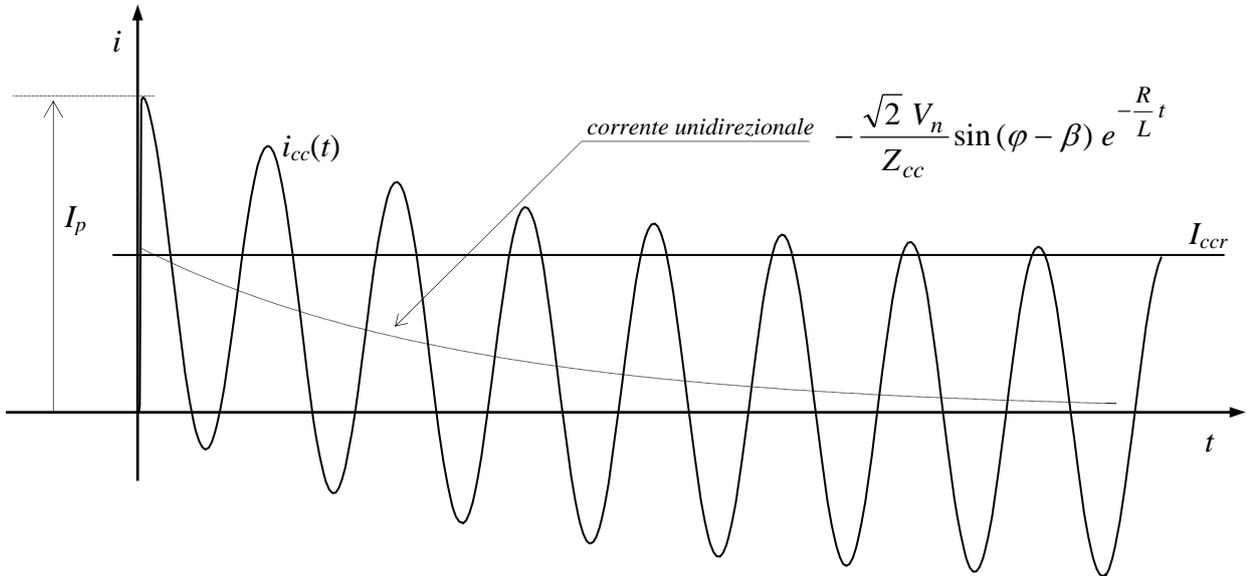
$$i(t) = \left[ -\frac{V_m}{Z_{cc}} \sin(\varphi - \beta) \right] e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_m}{Z_{cc}} \sin(\omega t + \varphi - \beta)$$

$$1.2 \quad \boxed{i_{cc}(t) = \frac{\sqrt{2} V}{Z_{cc}} \left[ \sin(\omega t + \varphi - \beta) - \sin(\varphi - \beta) e^{-\frac{R}{L}t} \right]} \quad ; \quad \boxed{\tan \beta = \frac{\omega L}{R}}$$

L'andamento della  $i_{cc}$  nel tempo (a partire dall'istante  $t = 0$  in cui si chiude l'interruttore) è indicato nel grafico seguente, in cui si è posto:

$I_p$  : valore massimo della corrente di corto circuito

$I_{ccr}$  : valore di cresta della corrente di corto circuito a regime  $I_{ccr} = \sqrt{2} I_{cc} = \frac{\sqrt{2} V_n}{Z_{cc}}$

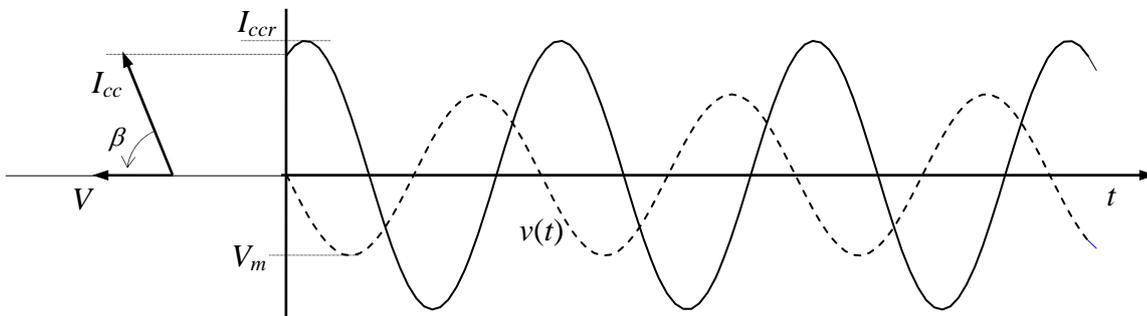


1.2 – Corrente di corto circuito a regime

Dalla 1.2 si ha, per  $t \rightarrow \infty$ , la corrente di corto circuito a regime (se non fosse interrotta):

2.1 
$$i_{ccr}(t) = \frac{V_m}{Z_{cc}} \sin(\omega t + \varphi - \beta)$$

il cui andamento nel tempo è riportato nel grafico seguente dove è riportata anche la tensione  $v(t) = \sqrt{2} V_n \sin(\omega t + \varphi) = V_m \sin(\omega t + \varphi)$ :



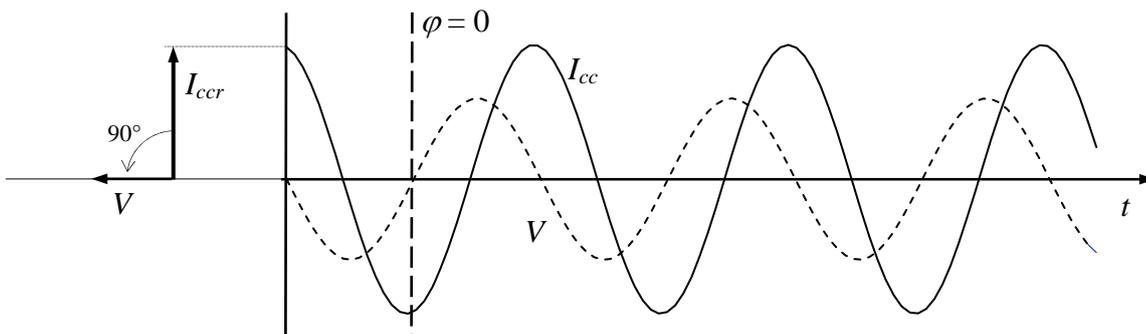
La corrente di corto a regime è sfasata in ritardo rispetto alla tensione dell'angolo  $\beta = \arctan \frac{\omega L}{R}$ ,

ed ha un valore efficace  $I_{cc} = \frac{V_n}{Z_{cc}}$  ed un valore di cresta  $I_{ccr} = \frac{\sqrt{2} V_n}{Z_{cc}}$ .

Se la resistenza degli avvolgimenti  $R$  è trascurabile nei confronti della reattanza  $X_{cc} = \omega L$ ,  $R \ll X_{cc}$ , si ha  $\beta \approx \pi/2$  e quindi la corrente di corto a regime, sfasata di  $90^\circ$  in ritardo rispetto alla tensione, è data da:

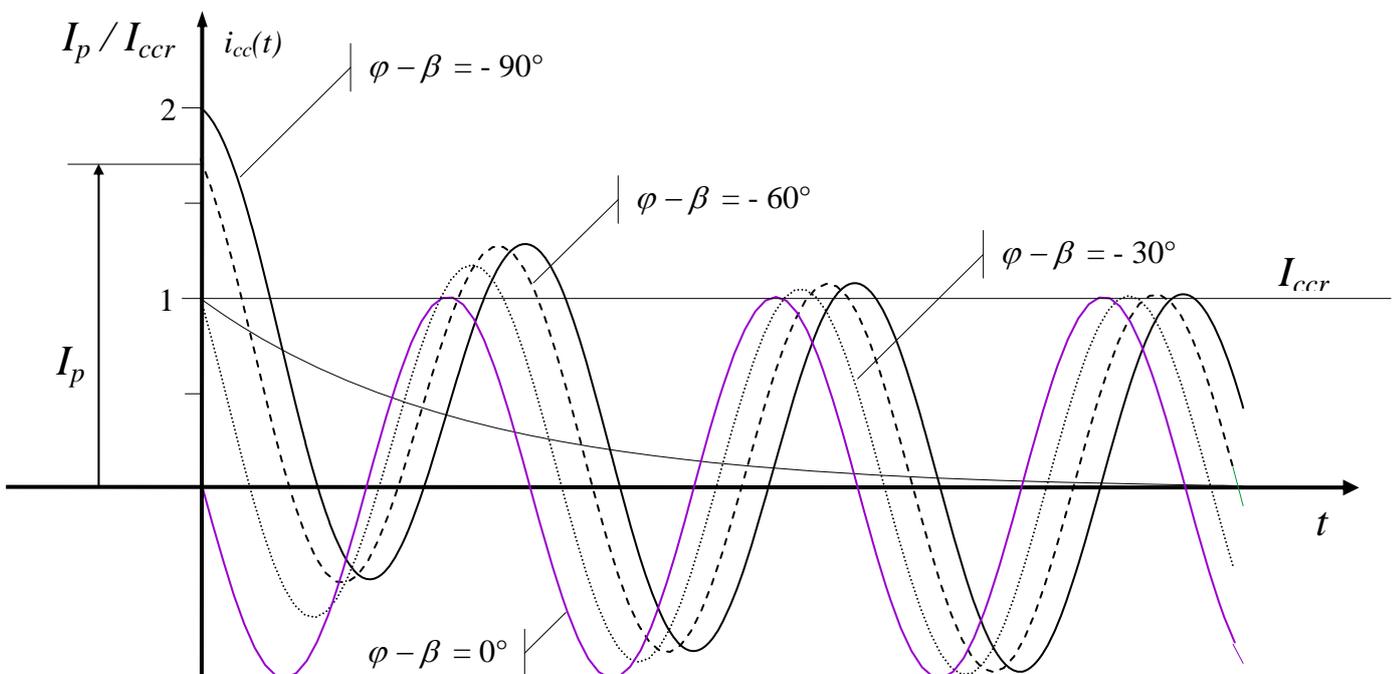
2.2 
$$i_{ccr}(t) = -\frac{\sqrt{2} V_n}{Z_{cc}} \cos(\omega t + \varphi)$$

e si ha la situazione illustrata nel grafico seguente:



1.3 – Valore di picco della corrente di corto circuito

Il valore di picco  $I_p$  della corrente di corto circuito dipende dall'angolo  $\varphi = \omega t_0$ , e quindi dall'istante  $t_0$  in cui ha inizio il corto circuito. Nel grafico seguente è riportato l'andamento della corrente di corto per diversi valori dell'angolo  $\varphi - \beta$  ( $\beta = \arctan \frac{\omega L}{R}$  dipende dagli elementi circuitali e dalla pulsazione  $\omega$  che possiamo ritenere costante dal momento che il sistema funziona a 50 Hz).



Nelle ordinate del grafico precedente è anche riportato il rapporto fra valore di picco  $I_p$  della corrente e valore di cresta della corrente di corto a regime  $I_{ccr}$ . Il più alto valore di tale rapporto si ha per  $\varphi - \beta = -90^\circ$ , cioè per  $\varphi = \beta - \pi/2$ , dove si ha  $I_p/I_{ccr} = 2$ .

### Spiegazione del grafico:

$$i_{cc}(t) = \frac{V_m}{Z_{cc}} \left[ \sin(\omega t + \varphi - \beta) - \sin(\varphi - \beta) e^{-\frac{R}{L}t} \right]$$

**1° caso:**  $\varphi - \beta = -90^\circ = -\frac{\pi}{2}$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 100 \cdot \pi \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad t = 0,01 \text{ s} \quad \omega t = 0,01 \cdot 100 \cdot \pi = \pi$$

$$\Rightarrow i_{cc}(0,01) = \frac{V_m}{Z_{cc}} \left[ \sin\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{R}{L} \cdot 0,01} \right] = \frac{V_m}{Z_{cc}} \left[ 1 + e^{-\frac{R}{L} \cdot 0,01} \right]$$

Se è vero che in genere  $X > R$ , non è detto che  $L > R$ . Per esempio potremmo avere:

$$\frac{R}{L} = 1 \Rightarrow e^{-\frac{R}{L} \cdot 0,01} \cong 0,99, \quad \frac{R}{L} = 10 \Rightarrow e^{-\frac{R}{L} \cdot 0,01} \cong 0,90,$$

$$\frac{R}{L} = 20 \Rightarrow e^{-\frac{R}{L} \cdot 0,01} \cong 0,82, \quad \frac{R}{L} = 30 \Rightarrow e^{-\frac{R}{L} \cdot 0,01} \cong 0,74$$

Nel caso peggiore:  $\Rightarrow i_{cc}(0,01) \cong 2 \frac{V_m}{Z_{cc}}$

**2° caso:**  $\varphi - \beta = -60^\circ = -\frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow i_{cc}(0,01) = \frac{V_m}{Z_{cc}} \left[ \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) e^{-\frac{R}{L} \cdot 0,01} \right] = \frac{V_m}{Z_{cc}} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{R}{L} \cdot 0,01} \right]$$

Nel caso peggiore:  $\Rightarrow i_{cc}(0,01) \cong 1,73 \frac{V_m}{Z_{cc}}$

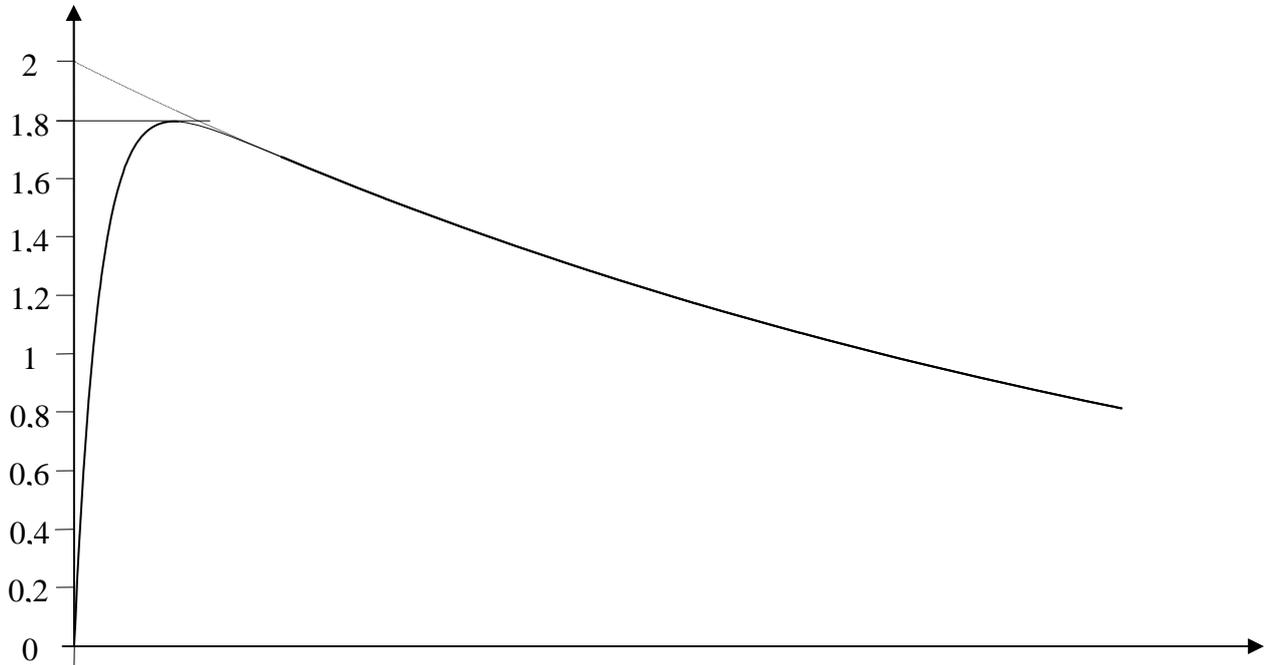
**3° caso:**  $\varphi - \beta = -30^\circ = -\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow i_{cc}(0,01) = \frac{V_m}{Z_{cc}} \left[ \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) e^{-\frac{R}{L} \cdot 0,01} \right] = \frac{V_m}{Z_{cc}} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-\frac{R}{L} \cdot 0,01} \right]$$

Nel caso peggiore:  $\Rightarrow i_{cc}(0,01) \cong \frac{V_m}{Z_{cc}}$

**4° caso:**  $\varphi - \beta = 0 \Rightarrow i_{cc}(0,01) = \frac{V_m}{Z_{cc}} \left[ \sin(\pi) - \sin(0) e^{-\frac{R}{L} \cdot 0,01} \right] = 0$

In realtà la parte iniziale del transitorio è descritta da un circuito equivalente più complesso di quello utilizzato, che tiene conto anche delle capacità degli avvolgimenti, ecc.; il transitorio che ne deriva è del tipo di quello indicato nel grafico seguente, in cui il valore di picco della corrente di corto è inferiore a  $I_p = 2I_{ccr}$ .



Per i calcoli di progettazione di solito si assume  $I_p/I_{ccr} = 1,8$ , cioè

$$3.1 \quad I_p = 1,8I_{ccr} = 1,8 \cdot \sqrt{2} I_{cc} = 2,54558 \cdot I_{cc} \approx 2,55 I_{cc}$$

dove  $I_{cc} = \frac{V_n}{Z_{cc}}$  è il valore efficace della corrente di corto circuito a regime.

Per quanto riguarda la durata delle sovracorrenti, si assume di solito che esse non superino il tempo  $t_{max} = 1$  s, in quanto si conta su un efficace e tempestivo intervento delle protezioni.

Si può verificare che:

$$V_{cc} = V_n \cdot v_{cc} \% = Z_{cc} I_n \quad \rightarrow \quad V_n = \frac{Z_{cc} I_n}{v_{cc} \%} \quad \rightarrow \quad \boxed{I_{cc} = \frac{V_n}{Z_{cc}} = \frac{1}{Z_{cc}} \cdot \frac{Z_{cc} I_n}{v_{cc} \%} = \frac{I_n}{v_{cc} \%}}$$

Perciò, se ad es.:

$$v_{cc} \% = 10\% \quad \rightarrow \quad I_{cc} = \frac{I_n}{v_{cc} \%} = \frac{I_n}{0,1} = 10I_n$$

$$v_{cc} \% = 5\% \quad \rightarrow \quad I_{cc} = \frac{I_n}{v_{cc} \%} = \frac{I_n}{0,05} = 20I_n$$

Questo è il valore efficace della corrente di corto circuito a regime, che si avrebbe se essa non venisse opportunamente interrotta dalle protezioni. Ma il valore di picco della corrente di corto circuito può essere anche superiore a questo valore, come sopra indicato.